

## Um Algoritmo para o Problema do Caminho Mínimo Fuzzy Utilizando Dominância e Similaridade

Fábio Hernandes<sup>1</sup>, Alane Marie de Lima<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Departamento de Ciência da Computação, Universidade Estadual do Centro-Oeste, DECOMP/UNICENTRO-PR, 85.015-430, caixa postal 3010, Guarapuava-PR  
[hernandes@unicentro.br](mailto:hernandes@unicentro.br), [alane\\_93\\_lima@hotmail.com](mailto:alane_93_lima@hotmail.com)

<sup>2</sup> Bolsista Fundação Araucária - Iniciação Científica

**Resumo.** O problema de caminho mínimo com incertezas nos parâmetros é um problema que aparece em muitas aplicações, tais como: telecomunicações; transportes; manufaturas; dentre outras, e que merece atenção. Neste trabalho é proposto um algoritmo que encontra um conjunto solução ordenado de caminhos não dominados, sendo as incertezas modeladas por meio da teoria dos conjuntos fuzzy e utilizados os conceitos de dominância para eliminar caminhos e de similaridade para ordenar os caminhos do conjunto solução. Dois exemplos numéricos são apresentados para ilustrar a eficiência do método proposto.

**Keywords:** Teoria dos Grafos, Problema de Caminho Mínimo, Teoria dos Conjuntos Fuzzy.

### 1 Introdução

A teoria dos grafos é uma área da computação que está presente na resolução de vários problemas que envolvem redes. Dentre estes, o *Problema de Caminho Mínimo* (PCM), que consiste em encontrar o menor caminho entre um nó origem  $s$  e outros nós  $t$  em uma rede direcionada, é um dos mais estudados da área, visto sua gama de aplicações em problemas de Engenharia, Telecomunicações, Transportes, Logística, dentre outros [1, 2].

Na literatura há diversos algoritmos que resolvem o PCM de modo eficiente, dentre os quais se destacam os algoritmos de Dijkstra e de Ford-Moore-Bellman [3]. No entanto, em muitas aplicações reais, há fatores incertos, imprecisos e ambíguos que nem sempre podem ser ignorados. Logo, tratar o PCM por meio da teoria dos conjuntos fuzzy torna o problema mais próximo da realidade, tratando-se, portanto, do *Problema de Caminho Mínimo Fuzzy* (PCM-Fuzzy) [4].

Os principais trabalhos da literatura que tratam do PCM-Fuzzy devem-se a Dubois e Prade [5], Okada e Soper [6], Okada [7], Nayeem e Pal [8], Hernandes *et al.* [1], Keshavarz e Khorram [9], Deng *et al.* [10] e Elizabeth e Sujatha [2]. No trabalho de Dubois e Prade [5], figurado entre um dos primeiros da literatura, é proposta a extensão dos algoritmos de Floyd e de Ford-Moore-Bellman, retornando, em alguns casos, custos de caminhos inexistentes. Okada e Soper [6] introduziram o conceito de

dominância entre caminhos, apresentando como solução final um conjunto de caminhos não dominados. A interatividade entre caminhos fuzzy é estudada por Okada [7], introduzindo o conceito de grau de possibilidade de um arco pertencer a um caminho mínimo. No trabalho de Nayeem e Pal [8] é proposto um algoritmo, baseado no índice de aceitabilidade de Sengupta e Pal [11], em que o usuário, de acordo com seu ponto de vista (otimista/pessimista), escolhe o melhor caminho. Hernandez *et al.* [1] propôs um algoritmo genérico, baseado no de Ford-Moore-Bellman, que trabalha com as incertezas até a obtenção da solução final, semelhante a Okada e Soper [6]. No trabalho de Keshavarz e Khorram [9] os custos dos arcos são intervalos *fuzzy*, sendo utilizado o método max-min de Bellman e Zadeh [12] para tratar o problema como clássico. Deng *et al.* [10] adaptaram o algoritmo de Dijkstra para resolver o PCM-Fuzzy utilizando índices de “defuzzificação”. Elizabeth e Sujatha [2] propuseram um algoritmo, semelhante aos trabalhos de Okada e Soper [6] e Hernandez *et al.* [1], que utiliza números fuzzy LR triangulares e aplicam índices de ordenação para os caminhos encontrados.

Apesar de resolverem o PCM-Fuzzy, os trabalhos citados anteriormente apresentam algumas desvantagens, tais como: apresentam um conjunto solução sem ordenar os caminhos [1, 6], fazem busca exaustiva de todos os caminhos existentes [2], retornam custos sem caminho associado [5], transformam o problema fuzzy em clássico [9, 10], dentre outras.

A fim de contornar as desvantagens citadas anteriormente, o objetivo deste trabalho é propor um algoritmo que gera um conjunto solução de caminhos ordenados. A eliminação dos caminhos mais “caros” se dá por meio da aplicação do conceito de dominância entre caminhos, utilizado por Okada e Soper [6], enquanto que a ordenação dos caminhos não dominados é feita pela Heurística de Chuang e Kung [13] ou pela definição de mínimo abordado em Elizabeth e Sujatha [2], acrescidos de alguns índices de ordenação utilizados por Elizabeth e Sujatha [2], um dos trabalhos mais recentes da literatura.

Este artigo está organizado da seguinte maneira: a Seção 2 contém conceitos e definições da teoria dos conjuntos fuzzy utilizados no trabalho, a Seção 3 apresenta o algoritmo proposto, na Seção 4 estão os resultados computacionais e na Seção 5 as conclusões e trabalhos futuros.

## 2 Conceitos e Definições

A teoria dos conjuntos fuzzy, introduzida nas décadas de 1960 e 1970 por Zadeh [14, 15, 16], com o intuito de dar um tratamento matemático a certos termos linguísticos subjetivos, é uma ferramenta que tem sido frequentemente utilizada na modelagem das incertezas.

Nesta seção são apresentadas as definições da teoria dos conjuntos fuzzy acerca dos termos e conceitos utilizados neste trabalho [17, 18].

**Definição 1.** Um número fuzzy triangular, denotado por  $\tilde{a} = (m - \delta, m, m + \beta)$ , tem sua função de pertinência  $\mathfrak{R} \rightarrow [0,1]$ ,  $\mu_{\tilde{a}}(x)$ , definida pela expressão:

$$\mu_{\tilde{a}}(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < (m - \delta) \\ \frac{x - (m - \delta)}{\delta}, & \text{se } (m - \delta) \leq x \leq m \\ \frac{(m + \beta) - x}{\beta}, & \text{se } m < x \leq (m + \beta) \\ 0, & \text{se } x > (m + \beta) \end{cases} \quad (1)$$

tal que:

$m$ : valor modal;  
 $\delta$ : espalhamento à esquerda; e  
 $\beta$ : espalhamento à direita.

**Observação:** Os valores  $(m - \delta)$  e  $(m + \beta)$  também são denominados de limitante inferior e limitante superior de  $\tilde{a}$ , respectivamente.

**Definição 2.** Sejam  $\tilde{a}$  e  $\tilde{b}$  dois números fuzzy triangulares,  $\tilde{a} = (m_1 - \delta_1, m_1, m_1 + \beta_1)$  e  $\tilde{b} = (m_2 - \delta_2, m_2, m_2 + \beta_2)$ , a soma fuzzy é denotada por:

$$\begin{aligned} \tilde{a} \oplus \tilde{b} &= (m_1 - \delta_1, m_1, m_1 + \beta_1) \oplus (m_2 - \delta_2, m_2, m_2 + \beta_2) = \\ &= ((m_1 - \delta_1) + (m_2 - \delta_2), m_1 + m_2, (m_1 + \beta_1) + (m_2 + \beta_2)) \end{aligned} \quad (2)$$

Para a eliminação de alguns caminhos entre os nós  $s$  (origem) e  $t$  (destino) foi utilizado o conceito de dominância (Definição 3) utilizada em Okada e Soper [6].

**Definição 3.** [6] Sejam  $\tilde{a} = (m_1 - \delta_1, m_1, m_1 + \beta_1)$  e  $\tilde{b} = (m_2 - \delta_2, m_2, m_2 + \beta_2)$  dois números fuzzy triangulares, então  $\tilde{a} \prec \tilde{b}$  ( $\tilde{a}$  domina  $\tilde{b}$ ) se, e somente se,  $m_1 - \delta_1 \leq m_2 - \delta_2$ ,  $m_1 \leq m_2$ ,  $m_1 + \beta_1 \leq m_2 + \beta_2$  e  $\tilde{a} \neq \tilde{b}$ .

Considerando que a finalidade deste trabalho é propor um algoritmo que apresente um conjunto solução ordenado, para isso foram utilizados os índices de ordenação de Elizabeth e Sujatha [2] que são: intersecção entre números fuzzy (Equação 3), média entre modais (Equação 4) e a distância de Minkowski (Equação 5). Cabe ressaltar que estes foram utilizados para comparar os resultados obtidos com os Elizabeth e Sujatha [2], porém, o usuário poderá optar por outros índices de ordenação.

**Definição 4.** Seja  $L_i = (m_i - \delta_i, m_i, m_i + \beta_i)$  o custo do  $i$ -ésimo caminho fuzzy e seja  $L_{\min} = (m - \delta, m, m + \beta)$  o menor custo dentre todos os caminhos tal que  $m - \delta \leq m_i - \delta_i$ ,  $m \leq m_i$ ,  $m + \beta \leq m_i + \beta_i$ , a intersecção entre  $L_i$  e  $L_{\min}$  é calculada da seguinte forma:

$$T(L_{\min}, L_i) = \frac{(m + \beta) - (m_i - \delta_i)}{\delta_i + \beta} \quad (3)$$

**Definição 5.** (índices baseados em  $L_{min}$  e  $L_i$ ) [2] Sejam  $L_i = (m_i - \delta_i, m_i, m_i + \beta_i)$  o custo do  $i$ -ésimo caminho fuzzy e  $L_{min} = (m - \delta, m, m + \beta)$  o menor custo encontrado dentre todos os caminhos tal que  $m - \delta \leq m_i - \delta_i$ ,  $m \leq m_i$ ,  $m + \beta \leq m_i + \beta_i$ , então:

(a) o índice médio entre  $L_{min}$  e  $L_i$  é calculado da seguinte forma:

$$Z_i(L_{min}, L_i) = \frac{m + m_i}{2} \quad (4)$$

Neste caso  $L_1 < L_2$  se, e somente se,  $Z_1(L_{min}, L_1) < Z_2(L_{min}, L_2)$ .

(b) o índice de Minkowski entre  $L_{min}$  e  $L_i$  é calculado da seguinte forma:

$$d(L_{min}, L_i) = \sqrt[w]{f + |(m + \beta) - (m_i + \beta_i)|^w} \quad (5)$$

onde  $f$  denota  $|(m - \delta) - (m_i - \delta_i)|^w + |m - m_i|^w$  e  $w \in [1, \infty]$ . Neste caso  $L_1 < L_2$  se, e somente se,  $d_1(L_{min}, L_1) < d_2(L_{min}, L_2)$ .

### 3 Algoritmo Proposto

No Quadro 1 são apresentados os passos do algoritmo proposto, sendo que na Subseção 3.1 encontram-se os passos do algoritmo adaptado de Hernandez *et al.* [1], a fim de encontrar o conjunto solução dos caminhos não dominados, enquanto que na subseção 3.2 está o Algoritmo 2, que tem por finalidade encontrar um custo menor que os custos dos caminhos não dominados em 3.1.

**Quadro 1.** Passos do Algoritmo Proposto

<p><b>Passo 1:</b> Entre com uma rede <math>G = (N, A)</math>, tal que <math>N</math> é o conjunto de vértices (nós) e <math>A</math> o conjunto dos arcos.</p> <p><b>Passo 2:</b> Aplique o Algoritmo 1 para encontrar os caminhos não dominados <math>P_{ij}</math>, entre os nós <math>i</math> e <math>j</math>, e seus respectivos custos, <math>L_i</math>.</p> <p><b>Passo 3:</b> Encontre <math>L_{min}</math>, número fuzzy triangular menor que todos os custos dos caminhos não dominados, usando o Algoritmo 2.</p> <p><b>Passo 4:</b> Calcule a similaridade entre <math>L_{min}</math> e <math>L_i</math> usando a Definição 5 ou 6 para cada <math>i=1, 2, 3 \dots, k</math> (<math>k</math>: número de caminhos não dominados).</p> <p><b>Passo 5:</b> Ordenação dos caminhos por ordem do maior índice de similaridade.</p> <p><b>Passo 6:</b> FIM</p>
---

Ao analisar o Passo 4 do quadro anterior verifica-se que este possui duas opções, deixando a cargo do usuário optar pelo que melhor adapte ao seu problema.

### 3.1 Algoritmo 1: determinação dos caminhos não dominados

O algoritmo descrito tem por finalidade eliminar alguns caminhos caros, reduzindo assim a busca entre os possíveis caminhos existentes entre os nós origem e destino. Para isso foi utilizada a relação de dominância entre caminhos de Okada e Soper [6].

A seguir são apresentados os passos da adaptação de Hernandes *et al.* [1].

*Informações sobre as variáveis do algoritmo:*

$N$ : conjunto dos nós do grafo;

$A$ : conjunto dos arcos do grafo;

$n$ : número de nós;

$it$ : contador de iterações;

$\tilde{c}_{ji}$ : custo do arco  $(j,i)$ ;

$\tilde{c}_{(i,k)}^{it}$ : custo do caminho entre os nós  $s$  e  $i$ , com a etiqueta (rótulo)  $k$ , na iteração  $it$ ;

$\Gamma_i^{-1}$ : conjunto dos nós predecessores de  $i$ ; e

$L_i$ : custo do caminho não dominado  $i$ .

---

Algoritmo 1 – Adaptação de Hernandes *et al.* [1].

---

**Passo 0:** Início.

- i.  $\tilde{c}_{(s,1)}^0 \rightarrow (0, 0, 0)$
- ii.  $\tilde{c}_{(j,1)}^0 \rightarrow (M - 1, M, M + 1)$ ,  $j = 1, 2, 3, \dots, n$  e  $j \neq s$ ;  
tal que:
  - $M = \sum_{i=1}^{|A|} (m + \beta)_i$  (número grande para substituir o  $\infty$ )
- iii.  $it \rightarrow 1$ .

**Passo 1:** Construção dos caminhos, seleção das etiquetas e verificação da dominância.

- i.  $\tilde{c}_{(s,1)}^{it} \rightarrow (0, 0, 0)$ .
- ii.  $\forall j \in \Gamma_i^{-1}$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ , faça:
  - $\tilde{c}_{(i,k1)}^{it} \rightarrow \tilde{c}_{(j,k2)}^{it-1} \oplus \tilde{c}_{ji}$
- iii. Verificação da dominância entre as etiquetas.  
Para todas as etiquetas do nó  $i$  faça:
  - se  $\tilde{c}_{(i,k1)}^{it} \succ \tilde{c}_{(i,k2)}^{it} \Rightarrow$  elimine a  $k1$  –ésima etiqueta;
  - se  $\tilde{c}_{(i,k1)}^{it} \prec \tilde{c}_{(i,k2)}^{it} \Rightarrow$  elimine a  $k2$  –ésima etiqueta.

**Passo 2:** Critério de parada.

- i. Se  $(\tilde{c}_{(i,k1)}^{it} = \tilde{c}_{(i,k1)}^{it-1}, \forall i \in N)$  ou  $(it=n)$  faça:
  - se  $it = n$  e  $\tilde{c}_{(i,k1)}^{it} \neq \tilde{c}_{(i,k1)}^{it-1}, \forall i \in N \Rightarrow$  circuito negativo  $\Rightarrow$  Passo 4.
  - senão  $\Rightarrow$  Passo 3

ii. Senão:  $it \rightarrow it + 1 \Rightarrow$  volte ao Passo 1.

**Passo 3:** Composição dos caminhos não dominados.

Para cada caminho não dominado  $P_{st}$ ,  $i=1, \dots, k$ , de  $s$  para  $t$ , faça:

- $L_i \rightarrow \tilde{C}_{(t,k)}^{it}$

**Passo 4:** FIM

---

### 3.2 Algoritmo 2: procedimento heurístico para encontrar o $L_{min}$ .

Este algoritmo é a união da heurística de Chuang e Kung [13] com a definição de  $L_{min}$  de Elizabeth e Sujatha [2]. Sua finalidade é encontrar um custo que seja menor e mais próximo possível de todos os caminhos da rede.

A heurística de Chuang e Kung encontra o  $L_{min}$  como sendo um número fuzzy triangular que possui os menores espalhamento à esquerda, modal e à direita, enquanto que Elizabeth e Sujatha determinam  $L_{min}$  como sendo o menor modal, o maior espalhamento à esquerda e o menor espalhamento à direita.

*Informações sobre as variáveis do algoritmo:*

$L_i$  : custo do caminho não dominado  $i$  encontrado por meio do Algoritmo 1;

$k$ : número de caminhos não dominados entre os nós  $s$  e  $t$ ; e

$L_{min}$  : solução do algoritmo - custo mínimo encontrado.

---

Algoritmo 2 - Heurística para encontrar o  $L_{min}$

---

**Passo 0:** Dados de entrada

i. Entre com os custos dos caminhos não dominados da seguinte forma:

$$L_i = (m_i - \delta_i, m_i, m_i + \beta_i), \quad i = 1, 2, 3, \dots, k$$

**Passo 1:** Cálculo de  $L_{min}$

Escolha a opção para o cálculo de  $L_{min}$  (Passo 1.1 ou 1.2)

**1.1:** Definição de Elizabeth e Sujatha

$$L_{min} = (\min(m_i), \max(\delta_i), \min(\beta_i)), \quad i=1, 2, \dots, k.$$

**1.2:** Heurística de Chuang e Kung

- Forme o conjunto  $Q$  ordenando os  $L_i$ 's em ordem crescente de  $m_i$ :

$$Q = \{Q^1, Q^2, Q^3, \dots, Q^m\} \text{ tal que } Q^i = (m_i - \delta_i, m_i, m_i + \beta_i), \quad i = 1, 2, \dots, k$$

- Seja  $L_m = (m_1 - \delta_1, m_1, m_1 + \beta_1) = Q^1$

- Para  $i=2, 3, \dots, k$ , calcule:

$$\checkmark \quad m_i = \begin{cases} m_1, & \text{se } m_1 \leq (m_i - \delta_i) \\ \frac{(m_1 m_i) - ((m_1 - \delta_1)(m_i - \delta_i))}{(m_1 + m_i) - ((m_1 - \delta_1) + (m_i - \delta_i))}, & \text{se } m_1 > (m_i - \delta_i) \end{cases}$$

- ✓  $(m_1 - \delta_1) = \min\{(m_1 - \delta_1), (m_1 - \delta_1)\}$
- ✓  $(m_1 + \beta_1) = \min\{(m_1 + \beta_1), m_1\}$
- ✓  $L_m = (m_1 - \delta_1, m_1, m_1 + \beta_1)$
- $L_{\min} \rightarrow L_m$

**Passo 2:** Retorne  $L_{\min} = (m - \delta, m, m + \beta) \Rightarrow$  FIM

Se no Passo 1.1 existirem dois ou mais  $L_i$ 's com o mesmo  $m_i$  a ordenação pode ser feita arbitrariamente, visto que não afetará no resultado.

Ressalta-se que as métricas do Passo 1 (Algoritmo 2) podem ser substituídas por outras. A escolha destas se deu porque apresentam formas distintas de cálculo, além do mais, o trabalho de Elizabeth e Sujatha [2] é o base que será utilizado para confrontar os resultados.

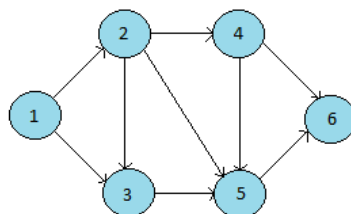
#### 4 Resultados Computacionais

O algoritmo proposto foi implementado na linguagem Java e testado em duas redes, Figuras 1 e 2, com seis nós e nove arcos cada. A diferença é que a segunda rede (Figura 2) possui um arco com custo negativo.

Para fins de comparação dos resultados, além dos exemplos terem sido aplicados utilizando os passos do algoritmo proposto (Quadro 1), os mesmo foram testados eliminando o Passo 2, ou seja, não foi utilizada a dominância de caminhos, ficando assim, similar ao trabalho de Elizabeth e Sujatha [2]. Ressalta-se que o valor de  $w$  adotado para o índice de Minkowski foi 3, conforme contido em Elizabeth e Sujatha [2] e objetivo foi encontrar os caminhos não dominados entre os nós 1 e 6.

##### **Exemplo 1**

Na Tabela 1 estão os custos dos arcos da rede, enquanto que nas Tabelas 2 e 3 são apresentados os resultados do algoritmo proposto, suprimindo o Passo 2. Na Tabela 2 estão os resultados utilizando-se o Passo 1.1 do Algoritmo 2 para o cálculo do  $L_{\min}$ , enquanto que na Tabela 3 foi aplicado o Passo 1.2.



**Fig. 1.** Rede de Chuang e Kung [13]

**Tabela 1.** Dados da rede da Figura 2

Arco	Origem	Destino	Custo
1	1	2	(33,45,50)
2	1	3	(42,57,61)
3	2	3	(50,52,61)
4	2	4	(56,58,72)
5	2	5	(51,79,85)
6	3	5	(43,55,60)
7	4	5	(32,40,46)
8	4	6	(88,92,134)
9	5	6	(75,110,114)

**Tabela 2.** Resultados obtidos eliminando o Passo 2 do Algoritmo Proposto e utilizando o Passo 1.1 do Algoritmo 2.

Caminho	TLRI	$Z_i$	LR Minkowski	Ranking por ordem de índices
1→2→4→6	1	195	66,63	1°, 1°, 3°
1→3→5→6	0,64	208,5	46,93	2°, 2°, 1°
1→2→5→6	0,56	214,5	57,24	3°, 3°, 2°
1→2→4→5→6	0,17	224	101,29	4°, 4°, 4°
1→2→3→5→6	0,09	228,5	108,82	5°, 5°, 5°

**Tabela 3.** Resultados obtidos eliminando o Passo 2 do Algoritmo Proposto e utilizando o Passo 1.2 do Algoritmo 2.

Caminho	TLRI	$Z_i$	LR Minkowski	Ranking por ordem de índices
1→2→4→6	0,75	187,33	36,53	1°, 1°, 1°
1→3→5→6	0,59	200,83	42,75	2°, 2°, 2°
1→2→5→6	0,54	206,83	56,48	3°, 3°, 3°
1→2→4→5→6	0,26	216,33	87,12	4°, 4°, 4°
1→2→3→5→6	0,2	220,83	95,92	5°, 5°, 5°

Analisando as Tabelas 2 e 3, baseadas nos índices de ordenação trabalhados, verifica-se que os caminhos 1→2→4→6, 1→3→5→6 e 1→2→5→6 foram os melhores, pois apresentaram as melhores posições.

O  $L_{min}$  encontrado ao aplicar o Passo 1.1 do Algoritmo 2 foi (120,195,208), enquanto que o encontrado pela Passo 1.2 foi (159,179,65,222).

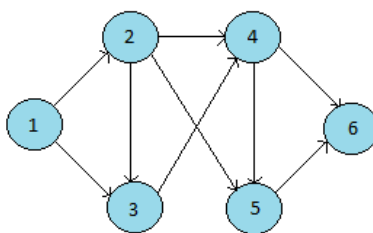
Ao se aplicar a dominância nos caminhos, os resultados obtidos e a ordenação foram as mesmas apresentadas nas Tabelas 2 e 3, com exceção dos caminhos 1→2→4→5→6 e 1→2→3→5→6 que foram eliminados, isto é, dominados.



**Exemplo 2**

Considerando que o Algoritmo 1 foi adaptado de Ford-Moore-Bellman, podendo ser aplicado em redes com custos negativos, neste exemplo a rede da Figura 2 foi extraída de Hernandes [4], sendo negativo o custo do arco 7 (Tabela 4).

As Tabelas 5 a 8 apresentam os resultados obtidos aplicando e suprimindo o Passo 2 do algoritmo proposto, bem como aplicando os Passos 1.1 ou 1.2 do Algoritmo 2 para o cálculo do  $L_{min}$ .



**Fig. 2.** Rede com custo negativo [4].

**Tabela 4.** Dados da rede da Figura 2

Arco	Origem	Destino	Custo
1	1	2	(1,2,3)
2	1	3	(5,7,9)
3	2	3	(1,4,9)
4	2	4	(10,11,12)
5	2	5	(5,6,7)
6	3	4	(8,9,10)
7	4	5	(-9,-8,-7)
8	4	6	(11,13,14)
9	5	6	(8,9,10)

**Tabela 5.** Resultados obtidos eliminando o Passo 2 do Algoritmo Proposto e utilizando o Passo 1.1 do Algoritmo 2.

Caminho	TLRI	$Z_i$	LR Minkowski	Ranking por ordem de índices
1→2→4→6	-0,71	20	18,97	6°, 5°, 5°
1→3→4→6	-0,87	21,5	23,14	7°, 7°, 7°
1→2→3→4→6	-0,4	21	23,11	5°, 6°, 6°
1→2→5→6	0,5	15,5	7,35	4°, 4°, 3°
1→2→4→5→6	1	14	3,04	1°, 1°, 1°
1→3→4→5→6	0,62	15,5	6,52	3°, 3°, 2°
1→2→3→4→5→6	0,73	15	8,08	2°, 2°, 4°

**Tabela 6.** Resultados obtidos utilizando o Passo 2 do Algoritmo Proposto e o Passo 1.1 do Algoritmo 2.

Caminho	TLRI	$Z_i$	LR Minkowski	Ranking por ordem de índices
1→2→4→5→6	1	14	3	1°, 1°, 1°
1→2→3→4→5→6	0,75	15	7,1	2°, 2°, 2°

**Tabela 7.** Resultados obtidos eliminando o Passo 2 do Algoritmo Proposto e utilizando o Passo 1.2 do Algoritmo 2.

Caminho	TLRI	$Z_i$	LR Minkowski	Ranking por ordem de índices
1→2→4→6	-0,76	19,05	19,2	6°, 5°, 5°
1→3→4→6	-0,9	20,55	23,58	7°, 7°, 6°
1→2→3→4→6	-0,46	20,05	23,95	5°, 6°, 7°
1→2→5→6	-0,29	14,55	6,74	4°, 4°, 2°
1→2→4→5→6	0,76	13,05	2,5	1°, 1°, 1°
1→3→4→5→6	0,45	14,55	7,11	3°, 3°, 3°
1→2→3→4→5→6	0,59	14,05	9,24	2°, 2°, 4°

**Tabela 8.** Resultados obtidos utilizando o Passo 2 do Algoritmo Proposto e o Passo 1.2 do Algoritmo 2.

Caminho	TLRI	$Z_i$	LR Minkowski	Ranking por ordem de índices
1→2→4→5→6	0,77	13,09	2,47	1°, 1°, 1°
1→2→3→4→5→6	0,59	14,09	9,22	2°, 2°, 2°

Analisando as tabelas dos resultados verifica-se que o caminho 1→2→4→5→6 foi, em média, o melhor entre os possíveis.

A Tabela 9 apresenta os resultados encontrados para o  $L_{min}$  utilizando ou não a dominância entre caminhos, bem como o Passo 1.1 e 1.2 do Algoritmo 2.

**Tabela 9.** Resultados de  $L_{min}$

	Passo 1.1 Algoritmo 2	Passo 1.2 Algoritmo 2
Sem dominância	(7, 14, 17)	(9, 12, 11, 16)
Com dominância	(7, 14, 18)	(9, 12, 18, 16)

Com os exemplos executados verificou-se que os caminhos que foram ordenados nas primeiras posições, segundo os índices utilizados (Definições 4 e 5), foram os mesmos com ou sem o uso da dominância.

## 5 Conclusões e Trabalhos Futuros

Neste trabalho foi proposto um algoritmo para o problema do caminho mínimo fuzzy, haja vista sua gama de aplicações em diferentes áreas e que merece atenção especial.

O algoritmo proposto apresenta um conjunto solução ordenado de caminhos não dominados. Para eliminar os caminhos mais caros foi usado o conceito de dominância [6] e para ordenar o conjunto solução foi usado o grau de similaridade (Passos 3 e 4 – Quadro 1) [2, 13]. Dois exemplos foram testados para ilustrar a eficiência do método proposto, sendo que: (i) os custos finais representam caminhos existentes e não dominados; (ii) o algoritmo trabalha com as incertezas até a obtenção da solução final; (iii) o conjunto solução apresenta os caminhos ordenados, porém caso o usuário opte por alterar os índices de ordenação, basta modificar o Passo 4; e (iv) por se tratar de uma adaptação do algoritmo de Ford-Moore-Bellman, este pode ser aplicado em redes com custos negativos.

Com relação aos três índices de ordenação utilizados, cabe ao usuário optar pelo que melhor adapta ao seu problema. Se estiver interessado na maior intersecção entre os custos, utilizará a equação 3, se estiver interessado na média entre os modais, utilizará a Equação 4, e se estiver interessado na distância de Minkowski, utilizará a equação 5.

Vale destacar que as incertezas nos arcos não se limitam apenas à distâncias geométricas, mas a outros tipos de informações, tais como: clima e outros fatores inesperados, tempo de viagem entre cidades, dentre outras.

Como propostas futuras pretende-se testar outros índices de ordenação.

## Referências

1. Hernandez, F., Lamata, M.T., Verdegay, J.L., Yamakami, A.: The Shortest Problem on Networks with Fuzzy Parameters. *Fuzzy Sets and Systems* 158, 1561-1570 (2007).
2. Elizabeth, S., Sujatha, L.: Fuzzy Shortest Path Problem Based on Level  $\lambda$ -Triangular Fuzzy Numbers. *Advances in Fuzzy Systems* 1-6 (2012).
3. Cormen, T. H., Leiserson, C.E., Rivest, R.L., Stein, C.: *Algoritmos – Teoria e Prática*. Editora Campus, Rio de Janeiro (2012).
4. Hernandez, F.: *Algoritmos para Problemas de Grafos com Incertezas*. Tese de Doutorado, Universidade Estadual de Campinas, Campinas (2007).
5. Dubois, D., Prade, H.: *Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications*. Academic Press, New York (1980).
6. Okada, S., Soper, T.: A Shortest Path Problem on a Network with Fuzzy Arc Lengths. *Fuzzy Sets and Systems* 109, 129-140 (2000).
7. Okada, S.: Fuzzy Shortest Path Problems Incorporating Interactivity Among Paths. *Fuzzy Sets and Systems* 142 (3), 335–357 (2004).
8. Nayeem, S.M.A., Pal, M.: Shortest Path Problem on a Network With Imprecise Edge Weight. *Fuzzy Optimization and Decision Making* 4, 293-312 (2005).
9. Keshavarz, E., Khorram, E.: A Fuzzy Shortest Path With the Highest Reliability. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 230, 204-212 (2009).
10. Deng, Y., Chen, Y., Zhang, Y., Mahadevan, S.: Fuzzy Dijkstra Algorithm for Shortest Path Problem Under Uncertain Environment. *Applied Soft Computing* 12, 1231-1237 (2012).

11. Sengupta, A., Pal, T. K.: On Comparing Interval Numbers. *European Journal of Operational Research* 127, 29-43 (2000).
12. Bellman, R.E., Zadeh, L.: Decision Making in a Fuzzy Environment. *Management Science*, 17 (1970).
13. Chuang, T., Kung, J.: The Fuzzy Shortest Path Length and the Corresponding Shortest Path in a Network. *Computers and Operations Research* 32, 1409-1428 (2005).
14. Zadeh, L.: Fuzzy Sets. *Information and Control* 8, 338-353 (1965).
15. Zadeh, L.: Fuzzy Algorithms. *Information and Control* 12 (1968).
16. Zadeh, L.: Fuzzy Sets as a Theory of Possibility. *Journal of Fuzzy Sets and Systems* 1 (1978).
17. Pedrycz, W., Gomide, F.: *Fuzzy Systems Engineering: Toward Human-Centric Computing*. IEEE/Wiley Interscience (2007).
18. Pedrycz, W., Gomide, F.: *An Introduction to Fuzzy Sets: Analysis and Design*. MIT Press, London (1998).