

CI1055: Algoritmos e Estruturas de Dados I

Profs. Drs. Marcos Castilho, Bruno Müller Jr, Carmem Hara

Departamento de Informática/UFPR

30 de julho de 2020

Resumo

Cálculo de séries

- Mostrar como implementar séries, em particular as *Séries de Taylor*

- Muitas funções importantes podem ser calculadas usando-se Séries de Taylor
- Exemplos: e^x , $\text{sen}(x)$, $\text{cos}(x)$, ...

- Uma série de Taylor tem a forma:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - a)^n,$$

onde

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

- O cálculo é feito em torno do ponto $x = a$
- $f^{(n)}$ é a n -ésima derivada de f .

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}, |x| < 1$$

$$\text{sen}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots$$

$$\text{sen}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots$$

- Computar estes cálculos não é tão simples quanto parece
- Os cálculos podem não convergir
- Vamos usar a técnica do acumulador, dentre outras
- Vamos iniciar com uma série bem simples
- Pretendemos mostrar como se calcula a função $\text{sen}(x)$ até o final desta aula

$$H_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots$$

- A série Harmônica diverge
- Não podemos computar até o infinito
- Vamos assumir que o cálculo será feito até o n -ésimo termo, sendo n fornecido pelo usuário

- Baseada na técnica do acumulador
- O segredo é perceber como um termo pode ser obtido a partir do anterior
- Ou de modo equivalente: como transformar um termo no próximo
- Se isto for bem resolvido então a implementação é simples, pois o uso da técnica do acumulador é bastante simples

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{n}$$

- Observar os termos:
 - uma fração com um *numerador* e um *denominador*
- Observar a diferença entre os termos:
 - todos os numeradores são iguais a 1
 - o primeiro denominador é 1
 - um denominador é obtido do anterior somando-se 1

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{n}$$

- Numerador: manter constante igual a 1
- Inicialização do denominador: `den := 1`
- Padrão repetitivo do denominador: `den := den + 1`
- Critério de parada: quando o contador atingir n

Implementação da série Harmônica

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{n}$$

```
program serie_harmonica;  
var cont, num, den, n: longint;  
    soma: real;  
begin  
    read (n);  
    cont:= 1;  
    num:= 1;  
    den:= 1;  
    soma:= 0;  
    while cont <= n do  
        begin  
            soma:= soma + num/den;  
            cont:= cont + 1;  
            den:= cont;  
        end;  
    writeln (soma:0:5);  
end.
```

$$\text{sen}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots$$

- Parece bem mais complicado, não?
- Numeradores:
 - são potências de x , sempre ímpares
- Denominadores:
 - são fatoriais de números ímpares
- O sinal dos termos se invertem a cada termo

Vamos fazer em etapas, tentando resolver um problema de cada vez

Comparando seno com harmônica

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{n}$$

$$\text{sen}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots$$

- Saber somar termos é simples
- Como dito, o segredo é transformar um termo no próximo
- Vamos implementar o seno progressivamente, partindo da série harmônica, até chegarmos ao seno

Uma série mais simples do que o seno

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{n}$$

$$F1_n = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

- A diferença entre elas é o denominador:
 - na primeira, são números inteiros sequenciais
 - na segunda, são fatoriais de inteiros sequenciais

Harmônica

```
begin
  read (n);
  cont:= 1;
  num:= 1;
  den:= 1;
  soma:= 0;
  while cont <= n do
  begin
    soma:= soma + num/den;
    cont:= cont + 1;
    den:= cont;
  end;
  writeln (soma:0:5);
end.
```

F1

```
begin
  read (n);
  cont:= 1;
  num:= 1;
  den:= 1;
  soma:= 0;
  while cont <= n do
  begin
    soma:= soma + num/den;
    cont:= cont + 1;
    den:= den * cont;
  end;
  writeln (soma:0:5);
end.
```


$$F1_n = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

$$F2_n = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{1}{n!}$$

- A diferença entre elas é o sinal dos termos
 - na primeira, são todos positivos
 - na segunda, são invertidos a cada termo

F1

```
begin
  read (n);
  cont:= 1;
  num:= 1;
  den:= 1;
  soma:= 0;

  while cont <= n do
    begin
      soma:= soma + num/den;

      cont:= cont + 1;
      den:= den * cont;
    end;
  writeln (soma:0:5);
end.
```

F2

```
begin
  read (n);
  cont:= 1;
  num:= 1;
  den:= 1;
  soma:= 0;
  sinal:= 1;
  while cont <= n do
    begin
      soma:= soma + sinal*num/den;
      sinal:= -sinal;
      cont:= cont + 1;
      den:= den * cont;
    end;
  writeln (soma:0:5);
end.
```

$$F2_n = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{1}{n!}$$

$$F3_n = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n!}$$

- A diferença entre elas é o numerador
 - na primeira, são todos iguais a 1
 - na segunda, são potencias progressivas de x

F2

```
begin
  read (n);
  cont:= 1;
  num:= 1;
  den:= 1;
  soma:= 0;
  sinal:= 1;
  while cont <= n do
  begin
    soma:= soma + sinal*num/den;
    sinal:= -sinal;
    cont:= cont + 1;

    den:= den * cont;
  end;
  writeln (soma:0:5);
end.
```

F3

```
begin
  read (n, x);
  cont:= 1;
  num:= x;
  den:= 1;
  soma:= 0;
  sinal:= 1;
  while cont <= n do
  begin
    soma:= soma + sinal*num/den;
    sinal:= -sinal;
    cont:= cont + 1;
    num:= num * x;
    den:= den * cont;
  end;
  writeln (soma:0:5);
end.
```

$$F3_n = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n!}$$

$$F4_n = x - \frac{x^3}{2!} + \frac{x^5}{3!} - \frac{x^7}{4!} + \frac{x^9}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{(2*n+1)}}{n!}$$

- A diferença entre elas é o numerador
 - na primeira, são potencias progressivas de x
 - na segunda, são potencias ímpares progressivas de x

F3

```
begin
  read (n, x);
  cont:= 1;
  num:= x;
  den:= 1;
  soma:= 0;
  sinal:= 1;
  while cont <= n do
  begin
    soma:= soma + sinal*num/den;
    sinal:= -sinal;
    cont:= cont + 1;
    num:= num * x;
    den:= den * cont;
  end;
  writeln (soma:0:5);
end.
```

F4

```
begin
  read (n, x);
  cont:= 1;
  num:= x;
  den:= 1;
  soma:= 0;
  sinal:= 1;
  while cont <= n do
  begin
    soma:= soma + sinal*num/den;
    sinal:= -sinal;
    cont:= cont + 1;
    num:= num * x * x;
    den:= den * cont;
  end;
  writeln (soma:0:5);
end.
```

Finalmente, $\text{sen}(x)$

$$F4_n = x - \frac{x^3}{2!} + \frac{x^5}{3!} - \frac{x^7}{4!} + \frac{x^9}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{(2*n+1)}}{n!}$$

$$\text{sen}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{(2*n+1)}}{(2 * n + 1)!}$$

- A diferença entre elas é o denominador:
 - na primeira, são fatoriais de n progressivas
 - na segunda, são fatoriais de n de ímpares progressivos

Cálculo de $\text{sen}(x)$

F4

$\text{sen}(x)$

```
begin
  read (n, x);
  cont:= 1;
  num:= x;
  den:= 1;
  soma:= 0;
  sinal:= 1;
  while cont <= n do
  begin
    soma:= soma + sinal*num/den;
    sinal:= -sinal;
    cont:= cont + 1;
    num:= num * x * x;
    den:= den * cont;
  end;
  writeln (soma:0:5);
end.
```

```
begin
  read (n, x);
  cont:= 1;
  num:= x;
  den:= 1;
  soma:= 0;
  sinal:= 1;
  while cont <= n do
  begin
    soma:= soma + sinal*num/den;
    sinal:= -sinal;
    den:= den * (2*cont)*(2*cont+1);
    num:= num * x * x;
    cont:= cont + 1;
  end;
  writeln (soma:0:5);
end.
```


- Calcular séries não é complicado
- Conforme explicado, basta perceber como o próximo termo é relacionado com o atual
- Percebendo esta diferença, implementa-se com tranquilidade

- Por exemplo:
 - numerador: multiplica-se por x^2 para obter o próximo
 - denominador: aprende-se a fazer o fatorial de ímpares sucessivos

- este material está no livro no capítulo 7, seção 7.8

- Slides feitos em \LaTeX usando beamer
- Licença

Creative Commons Atribuição-Uso Não-Comercial-Vedada a Criação de Obras Derivadas 2.5 Brasil License.<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.5/br/>

Creative Commons Atribuição-Uso Não-Comercial-Vedada a Criação de Obras Derivadas 2.5 Brasil License.<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.5/br/>