CI1057: Algoritmos e Estruturas de Dados III
Árvores Binárias

Profa. Carmem Hara

Departamento de Informática/UFPR

5 de setembro de 2024

Árvore Binária

Uma árvore binaria é ou um nodo externo ou um nodo interno conectado a um par de árvores binarias, chamadas de subárvore esquerda e subárvore direita do nodo.

Representação

```
typedef struct nodo *ApNodo;
struct nodo {
      TipoItem item;
      ApNodo esq, dir;
}
```

Propriedades das Árvores Binárias

Prop. 1: Uma árvore binária com N nodos internos tem $N+1$ nodos externos.

Prova: por indução no número de nodos internos N
Base: $N = 0$: caso com a árvore vazia e apenas um nodo externo
Passo da indução: $N > 0$: a raiz de uma árvore binária tem

- na subárvore esquerda: k nodos internos, onde $0 \leq k \leq N-1$
- na subárvore direita: $N-k-1$ nodos internos

Por hipótese da indução:

- subárvore esquerda tem $k+1$ nodos externos
- subárvore direita tem $N-k-1+1$ nodos externos

Assim, a árvore tem $(k+1)+(N-k-1+1) = N+1$ nodos externos.

Propriedades das Árvores Binárias

Prop. 2: Uma árvore binária com N nodos internos tem $2N$ arestas.

Prova:

- Todos os nodos internos, exceto a raiz tem uma ligação com seu único pai: $N - 1$ arestas
- Pela Prop. 1, existem $N + 1$ nodos externos, cada um com a ligação com o seu pai: $N + 1$ arestas

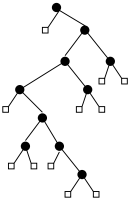
Total de arestas: $(N - 1) + (N + 1) = 2N$

Comprimento do Caminho da Árvore

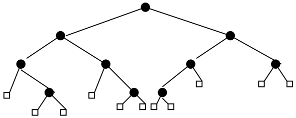
O Comprimento do Caminho da Árvore é a soma do nível de todos os nodos da árvore.

- o comprimento do caminho **interno** da árvore é a soma do nível de todos os nodos internos
- o comprimento do caminho **externo** da árvore é a soma do nível de todos os nodos externos

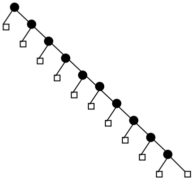
Exemplos: Árvores binárias com 10 nodos internos



Altura = 7
Caminho interno = 31
Caminho externo = 51



Altura = 4
Caminho interno = 19
Caminho externo = 39



Altura = 10
Caminho interno = 45
Caminho externo = 65

Implementação de Funções

- Contagem de nodos internos da árvore
- Determinar a altura da árvore
- Calcular o comprimento do caminho da árvore

Função: Contagem de nodos internos

```
int contaNodo( ApNodo p ){
    if( p == NULL )
        return 0;
    return 1 + contaNodo( p->esq ) + contaNodo( p->dir );
}
```

Função: altura da árvore

```
int altura( ApNodo p ){
    int he, hd;

    if( p == NULL )
        return 0;
    he = altura( p->esq );
    hd = altura( p->dir );
    if( he > hd )
        return he+1;
    else
        return hd+1;
}
```

Função: cálculo do Comprimento do Caminho da Árvore

```
int comprimentoCaminho( ApNodo p, int h ){
    if( p == NULL )
        return h;
    return h +
        comprimentoCaminho( p->esq, h+1 ) +
        comprimentoCaminho( p->dir, h+1 );
}

chamada: comprimentoCaminho( raiz, 0 );
```

Propriedades das Árvores Binárias

Prop. 3: Uma árvore binária com N nodos internos e com comprimento do caminho interno de X, tem comprimento do caminho externo de $(X + 2N)$.

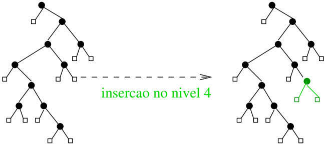
Comprimento Externo = Comprimento Interno $+2N$

Arvore vazia

Insercao de 1 nodo
no nivel 0

Nodos internos = 0
Comprimento interno = 0
Comprimento externo = 0

Nodos internos = 1
Comprimento interno = 0
(anterior 0 + novo nodo 0)
Comprimento externo = 2
(0+1) + (0+1) 2 novos



Nodos internos = 10
Comprimento interno = 31
Comprimento externo = 51

Nodos internos = 11
Comprimento interno = 35
(anterior 31 + novo nodo 4)
Comprimento externo = 57
(4+1) + (4+1) 2 novos
–4 (externo substituido pelo interno)

A insercao de um nodo interno no nivel k aumenta k no comprimento interno e k+2 no comprimento externo.

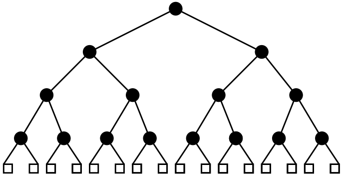
Repetindo este processo N vezes:
comprimento externo = comprimento interno+2N

Pergunta

Como alterar a função *comprimentoCaminho* para obter o comprimento do caminho interno e comprimento do caminho externo?

Propriedades das Árvores Binárias

Prop. 4: A quantidade máxima de nodos no nível d de uma árvore binária é 2^d.



Nivel 0: 1 nodo
Nivel 1: 2 nodos
Nivel 2: 4 nodos
Nivel 3: 8 nodos
Nivel 4: 16 nodos

Árvore Binária Completa de altura h

Uma árvore binária completa de altura h é uma árvore binária na qual todos os nodos externos estão no nível h.

Prop. 5: a quantidade de nodos em uma árvore binaria completa de altura h é $2^{h+1} - 1$.

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^h = 2^{h+1} - 1$$

Propriedades das Árvores Binárias Completas

Prop. 6: A quantidade de nodos internos em uma árvore binaria completa de altura h é $2^h - 1$.

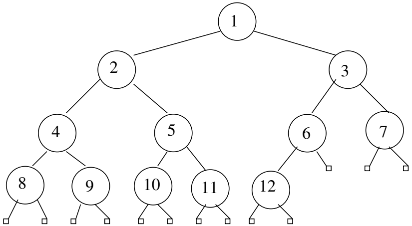
Consequência direta das Propriedades 4 e 5.

A altura de uma árvore binária completa com N nodos internos é $lg(N + 1)$.

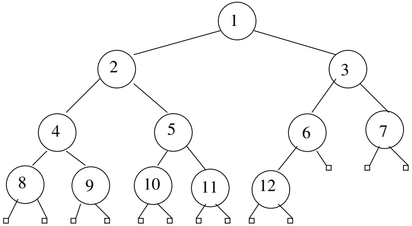
- $lg(1024) = 10$
- $lg(1.000.000) = 19$

Árvore Binária Quase Completa de altura h

- todos os nodos externos estão no nível h ou $h - 1$
- se um nodo n na árvore tem algum descendente direito no nível h (o máximo da árvore), então todos os nodos externos que são descendentes esquerdos de n estão também no nível h.



Árvore Binária Quase Completa de altura h



Numeração dos nodos:

- num(raiz) $= 1$
- num(n) $= 2$ * num(pai(n)) se n é filho esquerdo do seu pai
- num(n) $= 2$ * num(pai(n)) $+ 1$ se n é filho direito do seu pai

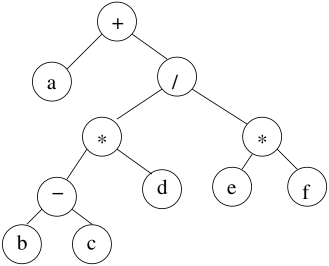
Árvore Binária Quase Completa de altura h

- a altura de uma árvore binária quase completa com N nodos internos é $\lceil (lg(N+1)) \rceil$.
- esta árvore tem a quantidade de nodos internos entre uma árvore binaria completa de altura $h-1$ (com $2^{h-1}-1$ nodos internos) e uma árvore binária completa de altura h (com (2^h-1) nodos internos).

Exemplo de Utilização de Árvores Binárias

Representação de expressões aritmeticas

$$a + ((b - c) * d / (e * f))$$



Referências

- Secoes 5.1 e 7.2 do livro "Estruturas de Dados Usando C"de Tenembaum, Langsam e Augenstein
- Secoes 5.4 e 5.5 do livro do Sedgewick