# Algoritmos e Estruturas de Dados II

Exercícios

12 de abril de 2010

1. Considere o seguinte algoritmo para o problema de Mínimo de Vetor.

```
M(v,a,b)
  Se a = b
      Devolva a
  m ← M(v, a + 1, b)
  Se v[a] < v[m]
      m ← a
  Devolva m
```

   (a) É verdade que

   $$\mathsf{M}(v, a, b) = \mathsf{Mínimo}'(v, a, b),$$

   para toda instância $(v, a, b)$ do problema de Mínimo de Vetor[1]? Justifique.

   (b) Seja $c(n)$ o número de comparações entre elementos de $v$ efetuadas na execução de uma instância de tamanho $n$ do problema. Expresse $c(n)$ como uma recorrência.

   (c) Resolva esta recorrência.

2. Considere o seguinte problema computacional.

| Fatorial |
|---|
| Instância: $n \in \mathbb{N}$. |
| Resposta: $n!$ |

[1] Mínimo′ refere-se ao algoritmo discutido em aula

(a) Escreva um algoritmo recursivo para resolver o problema.

(b) Seja $m(n)$ o número de multiplicações efetuadas pelo seu algoritmo para computar a instância $n$. Expresse $m(n)$ como uma recorrência.

(c) Resolva esta recorrência.

3. Considere o seguinte problema computacional.

| Exponenciação |
|---|
| Instância: $(x, n)$, onde $x \neq 0 \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$.<br>Resposta: $x^n$ |

(a) Escreva um algoritmo recursivo para resolver o problema de Exponenciação baseado na seguinte observação.

$$x^n = x \times x^{n-1}, \text{ para todo } n > 0.$$

(b) Seja $m(n)$ o número de multiplicações efetuadas pelo seu algoritmo para computar a instância $(x, n)$. Expresse $m(n)$ como uma recorrência.

(c) Resolva esta recorrência.

4. Sejam $f, s \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tais que

$$f(n) = s(n) + f(n-1) \text{ para todo } n > b,$$

Prove que[2]

$$f(n) = f(b) + \sum_{i=b+1}^{n} s(i) \text{ para todo } n \geq b.$$

5. Considere o seguinte problema computacional.

(a) Escreva um algoritmo *recursivo* para resolver este problema.

(b) Seja $s(n)$ o número de somas de elementos de $v$ efetuadas na execução de seu algoritmo para uma instância de tamanho $n$. Expresse $s(n)$ como uma recorrência, usando como tamanho de uma instância o valor de

$$|(v, a, b)| = b - a + 1,$$

[2]**Sugestão:** indução em $n$.

Soma de Vetor

Instância: $(v, a, b)$, onde $v$ é um vetor indexado por $[a..b]$.

Resposta: $\sum_{i=a}^{b} v[i]$

(c) Resolva esta recorrência[3].

6. O *fatorial descendente de $n$ a $k$* é

$$n_k = \frac{n!}{(n-k)!} = \prod_{i=n-k+1}^{n} i$$

Considere a seguinte generalização[4] do problema do Fatorial (Exercício 2).

Fatorial Descendente

Instância: $(n, k)$, onde $n \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$.

Resposta: $n_k$

(a) Descreva $n_k$ recursivamente.

(b) Escreva um algoritmo recursivo para resolver o problema, baseado na descrição do item anterior.

(c) Seja $m(n, k)$ o número de multiplicações efetuadas pelo seu algoritmo para computar a instância $(n, k)$. Expresse $m(n, k)$ como uma recorrência.

(d) Prove[5] que $m(n, k) = m(k, k)$ para todo $0 \leq k \leq n$.

(e) Expresse $m(n, n)$ como uma recorrência.

(f) Resolva esta recorrência.

(g) Use a resposta dos itens anteriores para resolver a recorrência do item 6c.

7. Prove que,

$$\begin{aligned} \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor &= \frac{n - (n \mod 2)}{2}, \\ \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil &= \frac{n + (n \mod 2)}{2}. \end{aligned}$$

[3] **Sugestão:** use o Exercício 4

[4] Observe que $n! = n_n$.

[5] **Sugestão:** indução em $n - k$.

para todo $n \in \mathbb{N}$.

**Sugestão:** considere separadamente os casos em que $n$ é par ou ímpar.

8. Seja $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que

$$f(n) = 1 + f\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + f\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right), \text{ para todo } n \geq 2.$$

Prove que[6]

$$f(n) = n(f(1) + 1) - 1 \text{ para todo } n \geq 1.$$

9. Sejam $a \leq b \in \mathbb{Z}$ e sejam

$$\begin{aligned} |(a,b)| &= b - a + 1, \\ m &= \left\lfloor \frac{a+b}{2} \right\rfloor, \end{aligned}$$

Prove que

(a) $a + b$ é par se e somente se $|(a,b)|$ é ímpar.

(b) $|(a,m)| = \left\lceil \dfrac{|(a,b)|}{2} \right\rceil$.

(c) $|(m+1,b)| = \left\lfloor \dfrac{|(a,b)|}{2} \right\rfloor$.

(d) $|(a,m-1)| = \left\lfloor \dfrac{|(a,b)| - 1}{2} \right\rfloor$.

**Sugestão:** considere separadamente os casos em que $|(a,b)|$ é par ou ímpar.

10. Considere o seguinte algoritmo para o problema de Mínimo de Vetor.

```
M(v,a,b)
  Se a = b
     Devolva a
  m ← ⌊(a+b)/2⌋
  m1 ← M'(v, a, m)
  m2 ← M'(v, m + 1, b)
  Se v[m1] ≤ v[m2]
     Devolva m1
  Devolva m2
```

[6]**Sugestão:** use o Exercício 7 e faça a prova por indução em $n$.

(a) Execute $\mathsf{M}(v, a, b)$ para as mesmas instâncias do problema de Mínimo de Vetor usadas como exemplo em aula.

(b) Seja $c(n)$ o número de comparações entre elementos de $v$ efetuadas na execução de M com uma instância de tamanho $n$. Expresse $c(n)$ como uma recorrência[7].

(c) Resolva esta recorrência[8].

11. A *seqüência de Fibonacci* é a função $F\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada pela recorrência

$$F(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \leq 1, \\ F(n-1) + F(n-2), & \text{se } n > 1. \end{cases}$$

Considere o seguinte problema computacional.

| Número de Fibonacci |
|---|
| Instância: $n \in \mathbb{N}$. |
| Resposta: $F(n)$. |

(a) Escreva um algoritmo *recursivo* para resolver este problema.

(b) Seja $s(n)$ o número de somas efetuadas pelo seu algoritmo para computar a instância $n$. Expresse $s(n)$ como uma recorrência.

(c) Prove que[9]

$$s(n) = F(n+1) - 1 \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

12. Seja $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que

$$f(n) = 1 + f(n-2) \text{ para todo } n \geq 2.$$

Prove que[10]

$$f(n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + f(n \mod 2) \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

13. Considere o seguinte problema computacional.

[7] **Sugestão:** use o Exercício 9.
[8] **Sugestão:** use o Exercício 8.
[9] **Sugestão:** indução em $n$.
[10] **Sugestão:** indução em $n$.

| Reversão | |
|---|---|
| Instância: | $(v, a, b)$, onde $v$ é um vetor indexado por $[a..b]$. |
| Resposta: | O vetor $v$ revertido, isto é, modificado de tal forma que o primeiro elemento se torna o último, o segundo se torna o penúltimo e assim por diante. |

(a) Escreva um algoritmo *recursivo* para resolver este problema.

(b) Seja $t(n)$ o número de trocas entre elementos de $v$ efetuadas na execução de seu algoritmo uma instância de tamanho $n$ do problema, onde

$$|(v, a, b)| = b - a + 1.$$

i. Expresse $t(n)$ como uma recorrência.

ii. Resolva esta recorrência[11].

14. Considere o seguinte algoritmo para o problema de Busca em Vetor.

```
B(x,v,a,b)
-------------------------
Se a > b
    Devolva não
r ← B(x, v, a, b − 1)
Se r ≠ não
    Devolva r
Se x = v[b]
    Devolva b
Devolva não
```

É verdade que

$$\mathsf{B}(x, v, a, b) = \mathsf{Busca}(x, v, a, b),$$

para toda instância $(x, v, a, b)$ do problema[12]? Justifique.

[11]**Sugestão:** use o Exercício 12.

[12]Busca refere-se ao algoritmo discutido em aula.

15. Considere o seguinte algoritmo para o problema de Busca em Vetor.

```
B(x,v,a,b)
-----------------------------
Se a > b
    Devolva não
m ← ⌊(a+b)/2⌋
Se x = v[m]
    Devolva m
r ← B(x, v, a, m − 1)
Se r ≠ não
    Devolva r
Devolva B(x, v, m + 1, b)
```

(a) Execute $\mathsf{B}(x, v, a, b)$ para as mesmas instâncias do problema de Busca em Vetor usadas como exemplo em aula.

(b) Seja $c(x, v, a, b)$ o número de comparações entre elementos de $v$ efetuadas na execução de $\mathsf{B}(x, v, a, b)$, e seja

$$c^+(n) = \max\{c(x, v, a, b) \mid |(x, v, a, b)| = n\}.$$

i. Para que instâncias $(x, v, a, b)$ do problema temos

$$c(x, v, a, b) = c^+(n)?$$

ii. Expresse $c(n)$ como uma recorrência[13].

iii. Resolva esta recorrência[14].

16. Escreva uma versão iterativa do algoritmo pedido no Exercício 1. Qual é o invariante da iteração?

17. Escreva uma versão iterativa do algoritmo pedido no Exercício 2. Qual é o invariante da iteração?

18. Escreva uma versão iterativa do algoritmo pedido no Exercício 3. Qual é o invariante da iteração?

19. Escreva uma versão iterativa do algoritmo pedido no Exercício 5. Qual é o invariante da iteração?

20. Escreva uma versão iterativa do algoritmo pedido no Exercício 6. Qual é o invariante da iteração?

[13] **Sugestão:** use o Exercício 9.

[14] **Sugestão:** use o Exercício 28.

21. Escreva uma versão iterativa do algoritmo pedido no Exercício 13. Qual é o invariante da iteração?

22. Dizemos que o vetor $v[a..b]$ é um *palíndromo* se a leitura de $v$ na ordem direta é igual à sua leitura na ordem reversa, isto é, se

$$(v[a], v[a+1], \ldots, v[b-1], v[b]) = (v[b], v[b-1], \ldots, v[a+1], v[a]).$$

Considere o seguinte problema computacional.

| Palíndromo |
|---|
| Instância: $(v, a, b)$, onde $v$ é um vetor indexado por $[a..b]$. |
| Resposta: sim se $v[a..b]$ é um palíndromo ou não, caso contrário |

(a) Escreva um algoritmo *recursivo* para resolver este problema.

(b) Seja $c(v, a, b)$ o número de comparações entre elementos de $v$ efetuadas na execução de seu algoritmo para a instância $(v, a, b)$ do problema, e sejam

$$\begin{aligned} c^+(n) &= \max\{c(v,a,b) \mid |(v,a,b)| = n\}, \\ c^-(n) &= \min\{c(v,a,b) \mid |(v,a,b)| = n\}, \end{aligned}$$

onde

$$|(v,a,b)| = b - a + 1.$$

i. Descreva as instâncias $(v, a, b)$ de tamanho $n$ para as quais

$$c(v,a,b) = c^+(n).$$

ii. Descreva as instâncias $(v, a, b)$ de tamanho $n$ para as quais

$$s(v,a,b) = c^-(n).$$

iii. Dê uma expressão para $c^-(n)$.

iv. Expresse $c^+(n)$ como uma recorrência.

v. Resolva esta recorrência[15].

(c) Escreva uma versão iterativa do seu algoritmo. Qual é o invariante da iteração?

[15]**Sugestão:** use o Exercício 12.

23. Seja $p$ um vetor de números racionais indexado por $[a..b]$. Dados $c \leq d \in [a..b]$, vamos denotar por $p_{c,d}$ o polinômio

$$p_{c,d}(x) = p[c]x^0 + p[c+1]x^1 + \ldots + p[d]x^{c-d}.$$

Por exemplo, se $p$ é o vetor dado por

| $i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $p[i]$ | 4 | 8 | 15 | 16 | 23 | 42 |

então,

$$p_{0,5}(x) = 4x^0 + 8x^1 + 15x^2 + 16x^3 + 23x^4 + 42x^5,$$

e

$$p_{2,4}(x) = 15x^0 + 16x^1 + 23x^2.$$

Considere o seguinte problema computacional.

| Avaliação de Polinômio | |
|---|---|
| Instância: | $(p, a, b, x)$, onde $p$ é um vetor de números racionais indexado por $[a..b]$ e $x$ é um número racional. |
| Resposta: | $p_{a,b}(x)$. |

(a) Usando o algoritmo do Exercício 3, escreva um algoritmo *recursivo* para resolver este problema.

(b) Seja $s(p, a, b, x)$ o número de somas efetuadas pelo seu algoritmo para computar a instância $(p, a, b, x)$ do problema, e sejam

$$\begin{aligned} s^+(n) &= \max\{s(p, a, b, x) \mid |(p, a, b, x)| = n\}, \\ s^-(n) &= \min\{s(p, a, b, x) \mid |(p, a, b, x)| = n\}, \end{aligned}$$

onde

$$|(p, a, b, x)| = b - a + 1.$$

i. Descreva as instâncias $(p, a, b, x)$ de tamanho $n$ para as quais

$$s(p, a, b, x) = s^+(n).$$

ii. Descreva as instâncias $(p, a, b, x)$ de tamanho $n$ para as quais

$$s(p, a, b, x) = s^-(n).$$

iii. Dê uma expressão para $s^-(n)$.

iv. Expresse $s^+(n)$ como uma recorrência.

v. Resolva esta recorrência.

(c) Seja $m(p,a,b,x)$ o número de multiplicações efetuadas pelo seu algoritmo para computar a instância $(p,a,b,x)$ do problema, e sejam

$$\begin{aligned} m^+(n) &= \max\{m(p,a,b,x) \mid |(p,a,b,x)| = n\}, \\ m^-(n) &= \min\{m(p,a,b,x) \mid |(p,a,b,x)| = n\}. \end{aligned}$$

i. Descreva as instâncias $(p,a,b,x)$ de tamanho $n$ para as quais

$$m(p,a,b,x) = m^+(n).$$

ii. Descreva as instâncias $(p,a,b,x)$ de tamanho $n$ para as quais

$$m(p,a,b,x) = m^-(n).$$

iii. Dê uma expressão para $s^-(n)$.

iv. Expresse $m^+(n)$ como uma recorrência.

v. Resolva esta recorrência.

(d) Escreva uma versão iterativa do seu algoritmo. Qual é o invariante da iteração?

24. Considere o problema de Avaliação de Polinômio apresentado no Exercício 23.

O *Método de Horne* para a solução do problema de Avaliação de Polinômio (veja o Exercício 23) é um algoritmo baseado na observação de que, dada uma instância $(p,a,b,x)$ do problema, então

$$p_{a,b}(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } a > b, \\ p[a] + x p_{a+1,b}(x), & \text{se } a \leq b. \end{cases}$$

(a) Escreva um algoritmo *recursivo* para resolver o problema de Avaliação de Polinômio usando o método de Horner.

(b) Seja $s(p,a,b,x)$ o número de somas efetuadas pelo seu algoritmo para computar a instância $(p,a,b,x)$ do problema, e sejam

$$\begin{aligned} s^+(n) &= \max\{s(p,a,b,x) \mid |(p,a,b,x)| = n\}, \\ s^-(n) &= \min\{s(p,a,b,x) \mid |(p,a,b,x)| = n\}, \end{aligned}$$

onde

$$|(p,a,b,x)| = b - a + 1.$$

i. Descreva as instâncias $(p, a, b, x)$ de tamanho $n$ para as quais

$$s(p, a, b, x) = s^+(n).$$

ii. Descreva as instâncias $(p, a, b, x)$ de tamanho $n$ para as quais

$$s(p, a, b, x) = s^-(n).$$

iii. Dê uma expressão para $s^-(n)$.

iv. Expresse $s^+(n)$ como uma recorrência.

v. Resolva esta recorrência.

(c) Seja $m(p, a, b, x)$ o número de multiplicações efetuadas pelo seu algoritmo para computar a instância $(p, a, b, x)$ do problema, e sejam

$$\begin{aligned} m^+(n) &= \max\{m(p, a, b, x) \mid |(p, a, b, x)| = n\}, \\ m^-(n) &= \min\{m(p, a, b, x) \mid |(p, a, b, x)| = n\}. \end{aligned}$$

i. Descreva as instâncias $(p, a, b, x)$ de tamanho $n$ para as quais

$$m(p, a, b, x) = m^+(n).$$

ii. Descreva as instâncias $(p, a, b, x)$ de tamanho $n$ para as quais

$$m(p, a, b, x) = m^-(n).$$

iii. Dê uma expressão para $s^-(n)$.

iv. Expresse $m^+(n)$ como uma recorrência.

v. Resolva esta recorrência.

(d) Escreva uma versão iterativa do seu algoritmo. Qual é o invariante da iteração?

25. Dados $n, k \in \mathbb{N}$ o *coeficiente binomial* $\binom{n}{k}$ é o número de subconjuntos de $k$ elementos de um conjunto de $n$ elementos, e é dado por

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} 0, & \text{se } n < k, \\ \frac{n!}{k!(n-k)!}, & \text{se } 0 \leq k \leq n. \end{cases}$$

Considere o seguinte problema computacional:

| Coeficiente Binomial |
|---|
| Instância: $(n, k)$, onde $n, k \in \mathbb{N}$. |
| Resposta: $\binom{n}{k}$ |

(a) Quantas multiplicações realiza o seguinte algoritmo para o problema de Coeficiente Binomial[16]?

```
Binomial(n,k)
---
Se n < k
    Devolva 0
Devolva Fatorial(n) / (Fatorial(k) Fatorial(n−k))
```

(b) Seja $m(n, k)$ o número de multiplicações na execução do seguinte algoritmo[17].

```
Binomial'(n,k)
---
Se n < k
    Devolva 0
Devolva FatorialDescendente(n,k) / Fatorial(k)
```

Dê uma expressão para $m(n, k)$.

(c) Seja

$$m^+(n) = \max\{m(n, k) \mid 0 \leq k \leq n\}.$$

i. Para que instâncias $(n, k)$ do problema de Coeficiente Binomial temos

$$m(n, k) = m^+(n)?$$

ii. Dê uma expressão para $m^+(n)$.

(d) A partir da observação de que

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \text{ para todo } 0 \leq k \leq n,$$

modifique o Algoritmo Binomial′ de maneira a garantir que

$$m^+(n) = n - 1.$$

[16] Fatorial refere-se ao algoritmo dado como resposta no Exercício 2.
[17] FatorialDescendente refere-se ao algoritmo dado como resposta no Exercício 6.