Aula 5: determinação e simplificação de expressões lógicas

Circuitos Digitais

Rodrigo Hausen

CMCC – UFABC

4 e 6 de Fev. de 2013

http://compscinet.org/circuitos

Álgebra booleana [Boole, 1854]

- Álgebra onde há apenas dois valores válidos: **falso** e **verdadeiro**.
- Também denotados:
  - **F** e **V**;
  - **false** e **true** (ou **F** e **T**);
  - **desligado** e **ligado**;
  - **0** e **1**, etc.

Operações

- conjunção (**e**, **and**): $X \cdot Y$
- disjunção (**ou**, **or**: $X + Y$
- negação (**não**, **not**: $\overline{X}$
- disjunção exclusiva (**ou-ex**, **xor**): $X \oplus Y = \overline{X} \cdot Y + X \cdot \overline{Y}$

Tabelas verdade.

Tabela verdade da conjunção (**e**)

X	Y	$X \cdot Y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Tabela verdade da disjunção (**ou**)

X	Y	$X + Y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Tabela verdade da negação (**não**)

X	$\overline{X}$
0	1
1	0

Aula passada: expressões e funções lógicas

- Expressões lógicas:
  - $\overline{1} + (0 \cdot 1)$
  - $\overline{X} \cdot Y + X \cdot \overline{Y}$
  - $\overline{A + \overline{B} \cdot C} + A \cdot C + B$
- Funções lógicas: dadas por uma expressão ou tabela verdade
  -

X	Y	$F(X,Y)$
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	1

  - $F(X,Y) = \overline{X} \cdot Y + X \cdot Y$

Aula passada: regras básicas

1. $X + 0 = X$
elem. neutro da disjunção

2. $X + 1 = 1$

3. $X + Y = Y + X$
comutatividade da disjunção

4. $X \cdot Y = Y \cdot X$
comutatividade da conjunção

5. $X + X = X$

6. $X + \overline{X} = 1$

7. $X \cdot 0 = 0$

8. $X \cdot 1 = X$
elem. neutro da conjunção

9. $X \cdot X = X$

10. $X \cdot \overline{X} = 0$

11. $X \oplus X = 0$

12. $X + (Y + Z) = (X + Y) + Z$
associatividade da disjunção

13. $X \cdot (Y \cdot Z) = (X \cdot Y) \cdot Z$
associatividade da conjunção

14. $X \cdot (Y + Z) = X \cdot Y + X \cdot Z$ distributividade da conjunção

Leis de Morgan (ou Leis de DeMorgan)

15. $\overline{X + Y} = \overline{X} \cdot \overline{Y}$

16. $\overline{X \cdot Y} = \overline{X} + \overline{Y}$

Exemplo 1: O tempo para o dia seguinte na cidade de Booleville é bem regular e fácil de prever. O meteorologista da cidade criou uma tabela para prever se haverá chuva no dia seguinte (representada pela variável C) a partir de quatro variáveis cujo valor depende das condições meteorológicas do dia anterior.

- V – se está ventando
- F – se faz frio
- U – se está úmido
- N – se está nublado

As quatro variáveis são medidas pelo meteorologista e ele atribui um valor 0 (falso) ou 1 (verdadeiro) para cada uma delas.

Exemplo 1: O tempo para o dia seguinte na cidade de Booleville é bem regular e fácil de prever. O meteorologista da cidade criou uma tabela para prever se haverá chuva no dia seguinte (representada pela variável C) a partir de quatro variáveis cujo valor depende das condições meteorológicas do dia anterior.

- V – se está ventando
- F – se faz frio
- U – se está úmido
- N – se está nublado

As quatro variáveis são medidas pelo meteorologista e ele atribui um valor 0 (falso) ou 1 (verdadeiro) para cada uma delas.

Ou seja, C é função booleana de V, F, U e N:

$$C = C(V,F,U,N)$$

Previsão do tempo em Booleville: C (chuva amanhã) função lógica de V (vento hoje), F (frio hoje), U (dia úmido hoje) e N (nublado hoje).

V	F	U	N	C
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1

V	F	U	N	C
1	0	0	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

De tabela verdade para expressão lógica

Previsão do tempo em Booleville: C (chuva amanhã) função lógica de V (vento hoje), F (frio hoje), U (dia úmido hoje) e N (nublado hoje).

V	F	U	N	C	
0	0	0	0	0	
0	0	0	1	0	
0	0	1	0	0	
0	0	1	1	1	$\longrightarrow \overline{V} \cdot \overline{F} \cdot U \cdot N$
0	1	0	0	0	
0	1	0	1	1	
0	1	1	0	1	
0	1	1	1	1	

V	F	U	N	C
1	0	0	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

De tabela verdade para expressão lógica

Previsão do tempo em Booleville: C (chuva amanhã) função lógica de V (vento hoje), F (frio hoje), U (dia úmido hoje) e N (nublado hoje).

V	F	U	N	C	
0	0	0	0	0	
0	0	0	1	0	
0	0	1	0	0	
0	0	1	1	1	$\longrightarrow \overline{V}\cdot\overline{F}\cdot U\cdot N$
0	1	0	0	0	
0	1	0	1	1	$\longrightarrow \overline{V}\cdot F\cdot\overline{U}\cdot N$
0	1	1	0	1	
0	1	1	1	1	

V	F	U	N	C
1	0	0	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

Previsão do tempo em Booleville: C (chuva amanhã) função lógica de V (vento hoje), F (frio hoje), U (dia úmido hoje) e N (nublado hoje).

V	F	U	N	C	
0	0	0	0	0	
0	0	0	1	0	
0	0	1	0	0	
0	0	1	1	1	$\longrightarrow \overline{V} \cdot \overline{F} \cdot U \cdot N$
0	1	0	0	0	
0	1	0	1	1	$\longrightarrow \overline{V} \cdot F \cdot \overline{U} \cdot N$
0	1	1	0	1	$\longrightarrow \overline{V} \cdot F \cdot U \cdot \overline{N}$
0	1	1	1	1	

V	F	U	N	C
1	0	0	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

De tabela verdade para expressão lógica

Previsão do tempo em Booleville: C (chuva amanhã) função lógica de V (vento hoje), F (frio hoje), U (dia úmido hoje) e N (nublado hoje).

V	F	U	N	C	
0	0	0	0	0	
0	0	0	1	0	
0	0	1	0	0	
0	0	1	1	1	$\longrightarrow \overline{V}\cdot\overline{F}\cdot U\cdot N$
0	1	0	0	0	
0	1	0	1	1	$\longrightarrow \overline{V}\cdot F\cdot\overline{U}\cdot N$
0	1	1	0	1	$\longrightarrow \overline{V}\cdot F\cdot U\cdot\overline{N}$
0	1	1	1	1	$\longrightarrow \overline{V}\cdot F\cdot U\cdot N$

V	F	U	N	C	
1	0	0	0	0	
1	0	0	1	1	$\longrightarrow V\cdot\overline{F}\cdot\overline{U}\cdot N$
1	0	1	0	1	$\longrightarrow V\cdot\overline{F}\cdot U\cdot\overline{N}$
1	0	1	1	0	
1	1	0	0	0	
1	1	0	1	0	
1	1	1	0	1	$\longrightarrow V\cdot F\cdot\overline{U}\cdot N$
1	1	1	1	1	$\longrightarrow V\cdot F\cdot U\cdot N$

De tabela verdade para expressão lógica

Previsão do tempo em Booleville: C (chuva amanhã) função lógica de V (vento hoje), F (frio hoje), U (dia úmido hoje) e N (nublado hoje).

V	F	U	N	C	
0	0	0	0	0	
0	0	0	1	0	
0	0	1	0	0	
0	0	1	1	1	$\longrightarrow \overline{V}\cdot\overline{F}\cdot U\cdot N$
0	1	0	0	0	
0	1	0	1	1	$\longrightarrow \overline{V}\cdot F\cdot\overline{U}\cdot N$
0	1	1	0	1	$\longrightarrow \overline{V}\cdot F\cdot U\cdot\overline{N}$
0	1	1	1	1	$\longrightarrow \overline{V}\cdot F\cdot U\cdot N$

V	F	U	N	C	
1	0	0	0	0	
1	0	0	1	1	$\longrightarrow V\cdot\overline{F}\cdot\overline{U}\cdot N$
1	0	1	0	1	$\longrightarrow V\cdot\overline{F}\cdot U\cdot\overline{N}$
1	0	1	1	0	
1	1	0	0	0	
1	1	0	1	0	
1	1	1	0	1	$\longrightarrow V\cdot F\cdot\overline{U}\cdot N$
1	1	1	1	1	$\longrightarrow V\cdot F\cdot U\cdot N$

$$C(V,F,U,N) = \overline{V}\cdot\overline{F}\cdot U\cdot N +$$

De tabela verdade para expressão lógica

Previsão do tempo em Booleville: C (chuva amanhã) função lógica de V (vento hoje), F (frio hoje), U (dia úmido hoje) e N (nublado hoje).

V	F	U	N	C		V	F	U	N	C	
0	0	0	0	0		1	0	0	0	0	
0	0	0	1	0		1	0	0	1	1	$\longrightarrow V\cdot\overline{F}\cdot\overline{U}\cdot N$
0	0	1	0	0		1	0	1	0	1	$\longrightarrow V\cdot\overline{F}\cdot U\cdot\overline{N}$
0	0	1	1	1	$\longrightarrow \overline{V}\cdot\overline{F}\cdot U\cdot N$	1	0	1	1	0	
0	1	0	0	0		1	1	0	0	0	
0	1	0	1	1	$\longrightarrow \overline{V}\cdot F\cdot\overline{U}\cdot N$	1	1	0	1	0	
0	1	1	0	1	$\longrightarrow \overline{V}\cdot F\cdot U\cdot\overline{N}$	1	1	1	0	1	$\longrightarrow V\cdot F\cdot\overline{U}\cdot N$
0	1	1	1	1	$\longrightarrow \overline{V}\cdot F\cdot U\cdot N$	1	1	1	1	1	$\longrightarrow V\cdot F\cdot U\cdot N$

$$C(V,F,U,N) \quad = \quad \overline{V}\cdot\overline{F}\cdot U\cdot N+\overline{V}\cdot F\cdot\overline{U}\cdot N+$$

De tabela verdade para expressão lógica

Previsão do tempo em Booleville: C (chuva amanhã) função lógica de V (vento hoje), F (frio hoje), U (dia úmido hoje) e N (nublado hoje).

V	F	U	N	C	
0	0	0	0	0	
0	0	0	1	0	
0	0	1	0	0	
0	0	1	1	1	$\longrightarrow \overline{V}\cdot\overline{F}\cdot U\cdot N$
0	1	0	0	0	
0	1	0	1	1	$\longrightarrow \overline{V}\cdot F\cdot\overline{U}\cdot N$
0	1	1	0	1	$\longrightarrow \overline{V}\cdot F\cdot U\cdot\overline{N}$
0	1	1	1	1	$\longrightarrow \overline{V}\cdot F\cdot U\cdot N$

V	F	U	N	C	
1	0	0	0	0	
1	0	0	1	1	$\longrightarrow V\cdot\overline{F}\cdot\overline{U}\cdot N$
1	0	1	0	1	$\longrightarrow V\cdot\overline{F}\cdot U\cdot\overline{N}$
1	0	1	1	0	
1	1	0	0	0	
1	1	0	1	0	
1	1	1	0	1	$\longrightarrow V\cdot F\cdot\overline{U}\cdot N$
1	1	1	1	1	$\longrightarrow V\cdot F\cdot U\cdot N$

$$C(V,F,U,N) = \overline{V}\cdot\overline{F}\cdot U\cdot N + \overline{V}\cdot F\cdot\overline{U}\cdot N + \overline{V}\cdot F\cdot U\cdot\overline{N} +$$

Previsão do tempo em Booleville: C (chuva amanhã) função lógica de V (vento hoje), F (frio hoje), U (dia úmido hoje) e N (nublado hoje).

V	F	U	N	C	
0	0	0	0	0	
0	0	0	1	0	
0	0	1	0	0	
0	0	1	1	1	$\longrightarrow \overline{V}\cdot\overline{F}\cdot U\cdot N$
0	1	0	0	0	
0	1	0	1	1	$\longrightarrow \overline{V}\cdot F\cdot\overline{U}\cdot N$
0	1	1	0	1	$\longrightarrow \overline{V}\cdot F\cdot U\cdot\overline{N}$
0	1	1	1	1	$\longrightarrow \overline{V}\cdot F\cdot U\cdot N$

V	F	U	N	C	
1	0	0	0	0	
1	0	0	1	1	$\longrightarrow V\cdot\overline{F}\cdot\overline{U}\cdot N$
1	0	1	0	1	$\longrightarrow V\cdot\overline{F}\cdot U\cdot\overline{N}$
1	0	1	1	0	
1	1	0	0	0	
1	1	0	1	0	
1	1	1	0	1	$\longrightarrow V\cdot F\cdot\overline{U}\cdot N$
1	1	1	1	1	$\longrightarrow V\cdot F\cdot U\cdot N$

$$C(V,F,U,N) \;=\; \overline{V}\cdot\overline{F}\cdot U\cdot N+\overline{V}\cdot F\cdot\overline{U}\cdot N+\overline{V}\cdot F\cdot U\cdot\overline{N}+\overline{V}\cdot F\cdot U\cdot N+$$

Previsão do tempo em Booleville: C (chuva amanhã) função lógica de V (vento hoje), F (frio hoje), U (dia úmido hoje) e N (nublado hoje).

V	F	U	N	C	
0	0	0	0	0	
0	0	0	1	0	
0	0	1	0	0	
0	0	1	1	1	$\longrightarrow \overline{V}\cdot\overline{F}\cdot U\cdot N$
0	1	0	0	0	
0	1	0	1	1	$\longrightarrow \overline{V}\cdot F\cdot\overline{U}\cdot N$
0	1	1	0	1	$\longrightarrow \overline{V}\cdot F\cdot U\cdot\overline{N}$
0	1	1	1	1	$\longrightarrow \overline{V}\cdot F\cdot U\cdot N$

V	F	U	N	C	
1	0	0	0	0	
1	0	0	1	1	$\longrightarrow V\cdot\overline{F}\cdot\overline{U}\cdot N$
1	0	1	0	1	$\longrightarrow V\cdot\overline{F}\cdot U\cdot\overline{N}$
1	0	1	1	0	
1	1	0	0	0	
1	1	0	1	0	
1	1	1	0	1	$\longrightarrow V\cdot F\cdot\overline{U}\cdot N$
1	1	1	1	1	$\longrightarrow V\cdot F\cdot U\cdot N$

$$\begin{aligned} C(V,F,U,N) &= \overline{V}\cdot\overline{F}\cdot U\cdot N+\overline{V}\cdot F\cdot\overline{U}\cdot N+\overline{V}\cdot F\cdot U\cdot\overline{N}+\overline{V}\cdot F\cdot U\cdot N+ \\ &+ V\cdot\overline{F}\cdot\overline{U}\cdot N+V\cdot\overline{F}\cdot U\cdot\overline{N}+V\cdot F\cdot\overline{U}\cdot N+V\cdot F\cdot U\cdot N \end{aligned}$$

De tabela verdade para expressão lógica

Para facilitar a escrita, quando escrevemos uma conjunção, podemos considerar que o sinal "·" está implícito, como fazemos na álgebra comum.

$$
\begin{aligned}
C(V,F,U,N) &= \overline{V}\,\overline{F}\,U\,N + \overline{V}\,F\,\overline{U}\,N + \overline{V}\,F\,U\,\overline{N} + \overline{V}\,F\,U\,N + \\
&+ V\,\overline{F}\,\overline{U}\,N + V\,\overline{F}\,U\,\overline{N} + V\,F\,\overline{U}\,N + V\,F\,U\,N
\end{aligned}
$$

De tabela verdade para expressão lógica

Para facilitar a escrita, quando escrevemos uma conjunção, podemos considerar que o sinal "·" está implícito, como fazemos na álgebra comum.

$$\begin{aligned} C(V,F,U,N) &= \overline{V}\,\overline{F}\,U\,N + \overline{V}\,F\,\overline{U}\,N + \overline{V}\,F\,U\,\overline{N} + \overline{V}\,F\,U\,N + \\ &+ V\,\overline{F}\,\overline{U}\,N + V\,\overline{F}\,U\,\overline{N} + V\,F\,\overline{U}\,N + V\,F\,U\,N \end{aligned}$$

Vamos simplificar essa expressão. Colocando em evidência:

$$\begin{aligned} C(V,F,U,N) &= \overline{V}N\,(\overline{F}\,U + F\,\overline{U}) + \overline{V}\,F\,U\,(\overline{N} + N) + \\ &+ V\,\overline{F}\,(\overline{U}\,N + U\,\overline{N}) + V\,F\,N\,(\overline{U} + U) \end{aligned}$$

Para facilitar a escrita, quando escrevemos uma conjunção, podemos considerar que o sinal "$\cdot$" está implícito, como fazemos na álgebra comum.

$$\begin{aligned} C(V,F,U,N) &= \overline{V}\,\overline{F}\,U\,N + \overline{V}\,F\,\overline{U}\,N + \overline{V}\,F\,U\,\overline{N} + \overline{V}\,F\,U\,N + \\ &+ V\,\overline{F}\,\overline{U}\,N + V\,\overline{F}\,U\,\overline{N} + V\,F\,\overline{U}\,N + V\,F\,U\,N \end{aligned}$$

Vamos simplificar essa expressão. Colocando em evidência:

$$\begin{aligned} C(V,F,U,N) &= \overline{V}N\,(\overline{F}\,U + F\,\overline{U}) + \overline{V}\,F\,U\,(\overline{N} + N) + \\ &+ V\,\overline{F}\,(\overline{U}\,N + U\,\overline{N}) + V\,F\,N\,(\overline{U} + U) \end{aligned}$$

Usando a definição do **xor** $X \oplus Y = \overline{X}\,Y + X\,\overline{Y}$ e as regras $\overline{X} + X = 1$ e $X \cdot 1 = X$:

$$C(V,F,U,N) = \overline{V}\,N\,(F \oplus U) + \overline{V}\,F\,U + V\,\overline{F}\,(U \oplus N) + V\,F\,N$$

Para facilitar a escrita, quando escrevemos uma conjunção, podemos considerar que o sinal "$\cdot$" está implícito, como fazemos na álgebra comum.

$$\begin{aligned} C(V,F,U,N) &= \overline{V}\,\overline{F}\,U\,N + \overline{V}\,F\,\overline{U}\,N + \overline{V}\,F\,U\,\overline{N} + \overline{V}\,F\,U\,N + \\ &+ V\,\overline{F}\,\overline{U}\,N + V\,\overline{F}\,U\,\overline{N} + V\,F\,\overline{U}\,N + V\,F\,U\,N \end{aligned}$$

Vamos simplificar essa expressão. Colocando em evidência:

$$\begin{aligned} C(V,F,U,N) &= \overline{V}N\,(\overline{F}\,U + F\,\overline{U}) + \overline{V}\,F\,U\,(\overline{N} + N) + \\ &+ V\,\overline{F}\,(\overline{U}\,N + U\,\overline{N}) + V\,F\,N\,(\overline{U} + U) \end{aligned}$$

Usando a definição do **xor** $X \oplus Y = \overline{X}\,Y + X\,\overline{Y}$ e as regras $\overline{X} + X = 1$ e $X \cdot 1 = X$:

$$C(V,F,U,N) = \overline{V}\,N\,(F \oplus U) + \overline{V}\,F\,U + V\,\overline{F}\,(U \oplus N) + V\,F\,N$$

Poderíamos continuar a simplificação. Note que nem sempre é fácil simplificar, e que outras expressões (equivalentes) são possíveis.

Observações sobre funções

Procedimento para transformar a tabela verdade de uma função $F(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ em expressão lógica:

`PARA CADA linha da tabela onde` $F(X_1, X_2, \ldots, X_n) = 1$

  `escreva a conjunção` $Y_1 Y_2 \ldots Y_n$ `onde` $Y_i = \begin{cases} X_i & \texttt{se } X_i = 1 \\ \overline{X_i} & \texttt{se } X_i = 0 \end{cases}$

`faça a disjunção das conjunções obtidas`

Observações sobre funções

Procedimento para transformar a tabela verdade de uma função $F(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ em expressão lógica:

`PARA CADA linha da tabela onde` $F(X_1, X_2, \ldots, X_n) = 1$

`escreva a conjunção` $Y_1 Y_2 \ldots Y_n$ `onde` $Y_i = \begin{cases} X_i & \texttt{se } X_i = 1 \\ \overline{X_i} & \texttt{se } X_i = 0 \end{cases}$

`faça a disjunção das conjunções obtidas`

Cada uma das conjunções $Y_1 Y_2 \ldots Y_n$ é chamada *produto de variáveis lógicas* ou *mintermo*.

Note que o procedimento funciona para **qualquer** função lógica e a expressão obtida terá tabela verdade idêntica à da função original.

Procedimento para transformar a tabela verdade de uma função $F(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ em expressão lógica:

`PARA CADA linha da tabela onde` $F(X_1, X_2, \ldots, X_n) = 1$

`escreva a conjunção` $Y_1 Y_2 \ldots Y_n$ `onde` $Y_i = \begin{cases} X_i & \texttt{se } X_i = 1 \\ \overline{X_i} & \texttt{se } X_i = 0 \end{cases}$

`faça a disjunção das conjunções obtidas`

Cada uma das conjunções $Y_1 Y_2 \ldots Y_n$ é chamada *produto de variáveis lógicas* ou *mintermo*.

Note que o procedimento funciona para **qualquer** função lógica e a expressão obtida terá tabela verdade idêntica à da função original.

Teorema. Toda função lógica pode ser escrita como disjunção de mintermos (também chamada "soma de produtos" – SOP).
Portanto, **toda função lógica possui uma expressão que a define**.

Observações sobre funções

Procedimento para transformar a tabela verdade de uma função $F(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ em expressão lógica:

```
PARA CADA linha da tabela onde F(X1, X2, ..., Xn) = 1
    escreva a conjunção Y1 Y2 ... Yn onde Yi = { Xi se Xi = 1 ; ¬Xi se Xi = 0 }
faça a disjunção das conjunções obtidas
```

$$\texttt{PARA CADA linha da tabela onde } F(X_1, X_2, \ldots, X_n) = 1$$
$$\quad \texttt{escreva a conjunção } Y_1 Y_2 \ldots Y_n \texttt{ onde } Y_i = \begin{cases} X_i & \texttt{se } X_i = 1 \\ \overline{X_i} & \texttt{se } X_i = 0 \end{cases}$$
$$\texttt{faça a disjunção das conjunções obtidas}$$

Cada uma das conjunções $Y_1 Y_2 \ldots Y_n$ é chamada *produto de variáveis lógicas* ou *mintermo*.

Note que o procedimento funciona para **qualquer** função lógica e a expressão obtida terá tabela verdade idêntica à da função original.

Teorema. Toda função lógica pode ser escrita como disjunção de mintermos (também chamada "soma de produtos" – SOP).
Portanto, **toda função lógica possui uma expressão que a define**.

A forma de soma de produtos é uma **forma padrão** de representação de expressões booleanas. Outra forma padrão é o *produto de somas*.

É possível simplificar a expressão obtida para C mantendo-a como soma-de-produtos?

Observe que:

$$\overline{V}\,F\,U\,\overline{N} + \overline{V}\,F\,U\,N + V\,F\,U\,\overline{N} + V\,F\,U\,N$$

Simplificação na forma soma-de-produtos

É possível simplificar a expressão obtida para C mantendo-a como soma-de-produtos?

Observe que:

$$\begin{aligned} & \overline{V}\,F\,U\,\overline{N} + \overline{V}\,F\,U\,N + V\,F\,U\,\overline{N} + V\,F\,U\,N \\ = \; & F\,U\,[\overline{V}\,\overline{N} + \overline{V}\,N + V\overline{N} + V\,N] \end{aligned}$$

É possível simplificar a expressão obtida para C mantendo-a como soma-de-produtos?

Observe que:

$$\begin{aligned} & \overline{V}\,F\,U\,\overline{N} + \overline{V}\,F\,U\,N + V\,F\,U\,\overline{N} + V\,F\,U\,N \\ = \; & F\,U\,[\overline{V}\,\overline{N} + \overline{V}\,N + V\overline{N} + V\,N] \\ = \; & F\,U\,[\overline{V}\,(\overline{N} + N) + V\,(\overline{N} + N)] \end{aligned}$$

Simplificação na forma soma-de-produtos

É possível simplificar a expressão obtida para C mantendo-a como soma-de-produtos?

Observe que:

$$
\begin{aligned}
& \overline{V}\,F\,U\,\overline{N} + \overline{V}\,F\,U\,N + V\,F\,U\,\overline{N} + V\,F\,U\,N \\
= \quad & F\,U\,[\overline{V}\,\overline{N} + \overline{V}\,N + V\overline{N} + V\,N] \\
= \quad & F\,U\,[\overline{V}\,(\overline{N} + N) + V\,(\overline{N} + N)] \\
= \quad & F\,U\,[\overline{V} + V]
\end{aligned}
$$

É possível simplificar a expressão obtida para C mantendo-a como soma-de-produtos?

Observe que:

$$
\begin{aligned}
& \overline{V}\,F\,U\,\overline{N} + \overline{V}\,F\,U\,N + V\,F\,U\,\overline{N} + V\,F\,U\,N \\
= \; & F\,U\,[\overline{V}\,\overline{N} + \overline{V}\,N + V\overline{N} + V\,N] \\
= \; & F\,U\,[\overline{V}\,(\overline{N} + N) + V\,(\overline{N} + N)] \\
= \; & F\,U\,[\overline{V} + V] \\
= \; & F\,U
\end{aligned}
$$

Simplificação na forma soma-de-produtos

É possível simplificar a expressão obtida para C mantendo-a como soma-de-produtos?

Observe que:

$$\begin{aligned}
& \overline{V}\,F\,U\,\overline{N} + \overline{V}\,F\,U\,N + V\,F\,U\,\overline{N} + V\,F\,U\,N \\
= \;& F\,U\,[\overline{V}\,\overline{N} + \overline{V}\,N + V\overline{N} + V\,N] \\
= \;& F\,U\,[\overline{V}\,(\overline{N} + N) + V\,(\overline{N} + N)] \\
= \;& F\,U\,[\overline{V} + V] \\
= \;& F\,U
\end{aligned}$$

Logo, temos uma expressão mais simples para C:

$$C = \overline{V}\,\overline{F}\,U\,N + \overline{V}\,F\,\overline{U}\,N + V\,\overline{F}\,\overline{U}\,N + V\,\overline{F}\,U\,N + F\,U$$

Esta é a menor expressão como soma-de-produtos?

Observe que, quando temos algo do tipo:

$$\ldots + A\,\overline{B} + A\,B + \ldots$$

em uma expressão na forma soma-de-produtos podemos colocar A em evidência:

$$\ldots + A\,(\overline{B} + B) + \ldots$$

e simplificar por:

$$\ldots + A + \ldots$$

Observe que, quando temos algo do tipo:

$$\ldots + A\,\overline{B} + A\,B + \ldots$$

em uma expressão na forma soma-de-produtos podemos colocar A em evidência:

$$\ldots + A\,(\overline{B} + B) + \ldots$$

e simplificar por:

$$\ldots + A + \ldots$$

Problema: como encontrar dois mintermos idênticos a menos de uma mesma variável B, que aparece como B e $\overline{B}$?

Observe que, quando temos algo do tipo:

$$\ldots + A\,\overline{B} + A\,B + \ldots$$

em uma expressão na forma soma-de-produtos podemos colocar A em evidência:

$$\ldots + A\,(\overline{B} + B) + \ldots$$

e simplificar por:

$$\ldots + A + \ldots$$

Problema: como encontrar dois mintermos idênticos a menos de uma mesma variável B, que aparece como B e $\overline{B}$?

Solução: expresse a tabela verdade de forma que isso seja fácil de encontrar!

Mapa de Karnaugh

Tabela Verdade:

V	F	U	N	C
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1

V	F	U	N	C
1	0	0	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

Mapa de Karnaugh

Tabela Verdade:

V	F	U	N	C
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1

V	F	U	N	C
1	0	0	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

Mapa de Karnaugh: outra representação para a tabela verdade

VF \ UN	00	01	11	10
00	0	0	1	0
01	0	1	1	1
11	0	0	1	1
10	0	1	0	1

Representação em matriz para a tabela verade, onde **em linhas ou colunas adjacentes apenas uma variável muda** de 1 para 0 ou vice-versa.

$VF \backslash UN$	00	01	11	10
00	0	0	1	0
01	0	1	$\boxed{1}$	1
11	0	0	1	1
10	0	1	0	1

$$C = \overline{V}\,F\,U\,N +$$

Representação em matriz para a tabela verade, onde **em linhas ou colunas adjacentes apenas uma variável muda** de 1 para 0 ou vice-versa.

VF \ UN	00	01	11	10
00	0	0	1	0
01	0	1	$\boxed{1}$	$\boxed{1}$
11	0	0	1	1
10	0	1	0	1

$$C = \overline{V}\,F\,U\,N + \overline{V}\,F\,U\,\overline{N} +$$

Representação em matriz para a tabela verade, onde **em linhas ou colunas adjacentes apenas uma variável muda** de 1 para 0 ou vice-versa.

$VF \backslash UN$	00	01	11	10
00	0	0	1	0
01	0	1	1	1
11	0	0	1	1
10	0	1	0	1

$$C = \overline{V}\,F\,U +$$

Representação em matriz para a tabela verade, onde **em linhas ou colunas adjacentes apenas uma variável muda** de 1 para 0 ou vice-versa.

$VF \backslash UN$	00	01	11	10
00	0	0	1	0
01	0	1	1	1
11	0	0	1	1
10	0	1	0	1

$$C = \overline{V}\,F\,U + V\,F\,U\,N +$$

Mapa de Karnaugh

Representação em matriz para a tabela verade, onde **em linhas ou colunas adjacentes apenas uma variável muda** de 1 para 0 ou vice-versa.

$VF \backslash UN$	00	01	11	10
00	0	0	1	0
01	0	1	1	1
11	0	0	1	1
10	0	1	0	1

$$C = \overline{V}\,F\,U + V\,F\,U\,N + V\,F\,U\,\overline{N} +$$

Representação em matriz para a tabela verade, onde **em linhas ou colunas adjacentes apenas uma variável muda** de 1 para 0 ou vice-versa.

$VF \backslash UN$	00	01	11	10
00	0	0	1	0
01	0	1	1	1
11	0	0	1	1
10	0	1	0	1

$$C \quad = \quad \overline{V}\,F\,U + V\,F\,U +$$

Representação em matriz para a tabela verade, onde **em linhas ou colunas adjacentes apenas uma variável muda** de 1 para 0 ou vice-versa.

VF \ UN	00	01	11	10
00	0	0	1	0
01	0	1	1	1
11	0	0	1	1
10	0	1	0	1

$$C = F\,U +$$

Mapa de Karnaugh

Representação em matriz para a tabela verade, onde **em linhas ou colunas adjacentes apenas uma variável muda** de 1 para 0 ou vice-versa.

$VF \backslash UN$	00	01	11	10
00	0	0	1	0
01	0	$\boxed{1}$	1	1
11	0	0	1	1
10	0	1	0	1

$$C = F\,U + \overline{V}\,F\,\overline{U}\,N +$$

Representação em matriz para a tabela verade, onde **em linhas ou colunas adjacentes apenas uma variável muda** de 1 para 0 ou vice-versa.

$VF \backslash UN$	00	01	11	10
00	0	0	1	0
01	0	1	1	1
11	0	0	1	1
10	0	1	0	1

$$C = F\,U + \overline{V}\,F\,\overline{U}\,N + \overline{V}\,F\,U\,N +$$

Mapa de Karnaugh

Representação em matriz para a tabela verade, onde **em linhas ou colunas adjacentes apenas uma variável muda** de 1 para 0 ou vice-versa.

$VF \backslash UN$	00	01	11	10
00	0	0	1	0
01	0	1	1	1
11	0	0	1	1
10	0	1	0	1

$$C = F\,U + \overline{V}\,F\,N +$$

Mapa de Karnaugh

Representação em matriz para a tabela verade, onde **em linhas ou colunas adjacentes apenas uma variável muda** de 1 para 0 ou vice-versa.

$VF \backslash UN$	00	01	11	10
00	0	0	1	0
01	0	1	1	1
11	0	0	1	1
10	0	1	0	1

$$C = F\,U + \overline{V}\,F\,N +$$

Mapa de Karnaugh

Representação em matriz para a tabela verade, onde **em linhas ou colunas adjacentes apenas uma variável muda** de 1 para 0 ou vice-versa.

VF \ UN	00	01	11	10
00	0	0	1	0
01	0	1	1	1
11	0	0	1	1
10	0	1	0	1

$$C = F\,U + \overline{V}\,F\,N + \overline{V}\,U\,N +$$

Mapa de Karnaugh

Representação em matriz para a tabela verade, onde **em linhas ou colunas adjacentes apenas uma variável muda** de 1 para 0 ou vice-versa.

VF \ UN	00	01	11	10
00	0	0	1	0
01	0	1	1	1
11	0	0	1	1
10	0	1	0	1

$$C = F\,U + \overline{V}\,F\,N + \overline{V}\,U\,N +$$

Representação em matriz para a tabela verade, onde **em linhas ou colunas adjacentes apenas uma variável muda** de 1 para 0 ou vice-versa.

VF \ UN	00	01	11	10
00	0	0	1	0
01	0	1	1	1
11	0	0	1	1
10	0	1	0	1

$$C = F\,U + \overline{V}\,F\,N + \overline{V}\,U\,N + V\,U\,\overline{N} +$$

Representação em matriz para a tabela verade, onde **em linhas ou colunas adjacentes apenas uma variável muda** de 1 para 0 ou vice-versa.

$VF \backslash UN$	00	01	11	10
00	0	0	1	0
01	0	1	1	1
11	0	0	1	1
10	0	1	0	1

$$C = F\,U + \overline{V}\,F\,N + \overline{V}\,U\,N + V\,U\,\overline{N} +$$

Representação em matriz para a tabela verade, onde **em linhas ou colunas adjacentes apenas uma variável muda** de 1 para 0 ou vice-versa.

$VF \backslash UN$	00	01	11	10
00	0	0	1	0
01	0	1	1	1
11	0	0	1	1
10	0	1	0	1

$$C = F\,U + \overline{V}\,F\,N + \overline{V}\,U\,N + V\,U\,\overline{N} + V\,\overline{F}\,\overline{U}\,N$$

Exemplo 2: Simplifique

$$\begin{aligned} F(A,B,C,D) &= \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + A\,\overline{B}\,C\,\overline{D} + A\,\overline{B}\,\overline{C}\,D + \overline{A}\,\overline{B}\,C\,D + \\ &+ A\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + \overline{A}\,B\,\overline{C}\,D + \overline{A}\,B\,C\,\overline{D} + A\,\overline{B}\,C\,D \end{aligned}$$

Exemplo 2: Simplifique

$$\begin{aligned} F(A,B,C,D) &= \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + A\,\overline{B}\,C\,\overline{D} + A\,\overline{B}\,\overline{C}\,D + \overline{A}\,\overline{B}\,C\,D + \\ &+ A\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,D + \overline{A}\,\overline{B}\,C\,\overline{D} + A\,\overline{B}\,C\,D \end{aligned}$$

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	0	0	0	0
11	0	0	0	0
10	1	1	1	1

Exemplo 2: Simplifique

$$
\begin{aligned}
F(A,B,C,D) &= \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + A\,\overline{B}\,C\,\overline{D} + A\,\overline{B}\,\overline{C}\,D + \overline{A}\,\overline{B}\,C\,D + \\
&+ A\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,D + \overline{A}\,\overline{B}\,C\,\overline{D} + A\,\overline{B}\,C\,D
\end{aligned}
$$

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	0	0	0	0
11	0	0	0	0
10	1	1	1	1

Exemplo 2: Simplifique

$$\begin{aligned} F(A,B,C,D) &= \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + A\,\overline{B}\,C\,\overline{D} + A\,\overline{B}\,\overline{C}\,D + \overline{A}\,\overline{B}\,C\,D + \\ &+ A\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,D + \overline{A}\,\overline{B}\,C\,\overline{D} + A\,\overline{B}\,C\,D \end{aligned}$$

$AB \backslash CD$	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	0	0	0	0
11	0	0	0	0
10	1	1	1	1

$$F(A,B,C,D) = \overline{A}\,\overline{B} + A\,\overline{B}$$

Exemplo 2: Simplifique

$$\begin{aligned} F(A,B,C,D) &= \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + A\,\overline{B}\,C\,\overline{D} + A\,\overline{B}\,\overline{C}\,D + \overline{A}\,\overline{B}\,C\,D + \\ &+ A\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,D + \overline{A}\,\overline{B}\,C\,\overline{D} + A\,\overline{B}\,C\,D \end{aligned}$$

$AB \backslash CD$	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	0	0	0	0
11	0	0	0	0
10	1	1	1	1

$$F(A,B,C,D) = \overline{A}\,\overline{B} + A\,\overline{B} = (\overline{A} + A)\,B$$

Exemplo 2: Simplifique

$$\begin{aligned} F(A,B,C,D) &= \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + A\,\overline{B}\,C\,\overline{D} + A\,\overline{B}\,\overline{C}\,D + \overline{A}\,\overline{B}\,C\,D + \\ &+ A\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,D + \overline{A}\,\overline{B}\,C\,\overline{D} + A\,\overline{B}\,C\,D \end{aligned}$$

$AB \backslash CD$	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	0	0	0	0
11	0	0	0	0
10	1	1	1	1

$$F(A,B,C,D) = \overline{A}\,\overline{B} + A\,\overline{B} = (\overline{A} + A)\,B = B$$

Exemplo 2: Simplifique

$$
\begin{aligned}
F(A,B,C,D) &= \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + A\,\overline{B}\,C\,\overline{D} + A\,\overline{B}\,\overline{C}\,D + \overline{A}\,\overline{B}\,C\,D + \\
&+ A\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,D + \overline{A}\,\overline{B}\,C\,\overline{D} + A\,\overline{B}\,C\,D
\end{aligned}
$$

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	0	0	0	0
11	0	0	0	0
10	1	1	1	1

$$F(A,B,C,D) = \overline{A}\,\overline{B} + A\,\overline{B} = (\overline{A} + A)\,B = B$$

Será que poderíamos observar a última simplificação no mapa?

Como a exigência é que apenas uma variável mude entre linhas/colunas adjacentes, poderíamos ter feito o mapa como:

$AB \backslash CD$	00	01	11	10
00	1	1	1	1
10	1	1	1	1
11	0	0	0	0
01	0	0	0	0

Como a exigência é que apenas uma variável mude entre linhas/colunas adjacentes, poderíamos ter feito o mapa como:

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	1	1	1
10	1	1	1	1
11	0	0	0	0
01	0	0	0	0

Como a exigência é que apenas uma variável mude entre linhas/colunas adjacentes, poderíamos ter feito o mapa como:

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	1	1	1
10	1	1	1	1
11	0	0	0	0
01	0	0	0	0

A única variável que não mudou foi

Como a exigência é que apenas uma variável mude entre linhas/colunas adjacentes, poderíamos ter feito o mapa como:

$AB \backslash CD$	00	01	11	10
00	1	1	1	1
10	1	1	1	1
11	0	0	0	0
01	0	0	0	0

A única variável que não mudou foi B, que permaneceu em 0

Como a exigência é que apenas uma variável mude entre linhas/colunas adjacentes, poderíamos ter feito o mapa como:

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	1	1	1
10	1	1	1	1
11	0	0	0	0
01	0	0	0	0

A única variável que não mudou foi B, que permaneceu em 0, portanto $F(A,B,C,D) = \overline{B}$.

Podemos ver essa simplificação diretamente no mapa original, se considerarmos que **a última linha é adjacente à primeira linha**, assim como **a última coluna é adjacente à primeira coluna**.

Podemos ver essa simplificação diretamente no mapa original, se considerarmos que **a última linha é adjacente à primeira linha**, assim como **a última coluna é adjacente à primeira coluna**.

$AB \backslash CD$	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	0	0	0	0
11	0	0	0	0
10	1	1	1	1

Mapa de Karnaugh

Podemos ver essa simplificação diretamente no mapa original, se considerarmos que **a última linha é adjacente à primeira linha**, assim como **a última coluna é adjacente à primeira coluna**.

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	0	0	0	0
11	0	0	0	0
10	1	1	1	1

Mapa de Karnaugh

Podemos ver essa simplificação diretamente no mapa original, se considerarmos que **a última linha é adjacente à primeira linha**, assim como **a última coluna é adjacente à primeira coluna**.

$AB \backslash CD$	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	0	0	0	0
11	0	0	0	0
10	1	1	1	1

$$F(A,B,C,D) = \overline{B}$$

Mapa de Karnaugh: como usar

Para até 4 variáveis:

- 1. Expresse a tabela verdade como uma matriz, com no máximo duas variáveis para as linhas/colunas. Em linhas adjacentes, apenas uma das variáveis muda (o mesmo vale para as colunas).
  Sugestão de rótulos para as linhas/colunas: 00, 01, 11, 10

Mapa de Karnaugh: como usar

Para até 4 variáveis:

- 1. Expresse a tabela verdade como uma matriz, com no máximo duas variáveis para as linhas/colunas. Em linhas adjacentes, apenas uma das variáveis muda (o mesmo vale para as colunas).
  Sugestão de rótulos para as linhas/colunas: 00, 01, 11, 10
- 2. Enquanto houver uma célula contendo 1 que não tiver sido agrupada, agrupe nesta ordem:
  1. Retângulos com 16 uns (**Obs.:** se houver, então $F = 1$)

Mapa de Karnaugh: como usar

Para até 4 variáveis:

- 1. Expresse a tabela verdade como uma matriz, com no máximo duas variáveis para as linhas/colunas. Em linhas adjacentes, apenas uma das variáveis muda (o mesmo vale para as colunas).
  Sugestão de rótulos para as linhas/colunas: 00, 01, 11, 10
- 2. Enquanto houver uma célula contendo 1 que não tiver sido agrupada, agrupe nesta ordem:
  1. Retângulos com 16 uns (**Obs.:** se houver, então $F = 1$)
  2. Retângulos com 8 uns (2x4 ou 4x2)

Mapa de Karnaugh: como usar

Para até 4 variáveis:

- 1. Expresse a tabela verdade como uma matriz, com no máximo duas variáveis para as linhas/colunas. Em linhas adjacentes, apenas uma das variáveis muda (o mesmo vale para as colunas).
  Sugestão de rótulos para as linhas/colunas: 00, 01, 11, 10
- 2. Enquanto houver uma célula contendo 1 que não tiver sido agrupada, agrupe nesta ordem:
  1. Retângulos com 16 uns (**Obs.:** se houver, então $F = 1$)
  2. Retângulos com 8 uns (2x4 ou 4x2)
  3. Retângulos com 4 uns (1x4, 4x1 ou 2x2)

Mapa de Karnaugh: como usar

Para até 4 variáveis:

- 1. Expresse a tabela verdade como uma matriz, com no máximo duas variáveis para as linhas/colunas. Em linhas adjacentes, apenas uma das variáveis muda (o mesmo vale para as colunas).
  Sugestão de rótulos para as linhas/colunas: 00, 01, 11, 10
- 2. Enquanto houver uma célula contendo 1 que não tiver sido agrupada, agrupe nesta ordem:
  1. Retângulos com 16 uns (**Obs.:** se houver, então $F = 1$)
  2. Retângulos com 8 uns (2x4 ou 4x2)
  3. Retângulos com 4 uns (1x4, 4x1 ou 2x2)
  4. Retângulos com 2 uns (1x2 ou 2x1)

Mapa de Karnaugh: como usar

Para até 4 variáveis:

- 1. Expresse a tabela verdade como uma matriz, com no máximo duas variáveis para as linhas/colunas. Em linhas adjacentes, apenas uma das variáveis muda (o mesmo vale para as colunas).
  Sugestão de rótulos para as linhas/colunas: 00, 01, 11, 10
- 2. Enquanto houver uma célula contendo 1 que não tiver sido agrupada, agrupe nesta ordem:
  1. Retângulos com 16 uns (**Obs.:** se houver, então $F = 1$)
  2. Retângulos com 8 uns (2x4 ou 4x2)
  3. Retângulos com 4 uns (1x4, 4x1 ou 2x2)
  4. Retângulos com 2 uns (1x2 ou 2x1)
  5. Retângulos com apenas 1 um

Mapa de Karnaugh: como usar

Para até 4 variáveis:

- 1. Expresse a tabela verdade como uma matriz, com no máximo duas variáveis para as linhas/colunas. Em linhas adjacentes, apenas uma das variáveis muda (o mesmo vale para as colunas).
  Sugestão de rótulos para as linhas/colunas: 00, 01, 11, 10
- 2. Enquanto houver uma célula contendo 1 que não tiver sido agrupada, agrupe nesta ordem:
  1. Retângulos com 16 uns (**Obs.:** se houver, então $F = 1$)
  2. Retângulos com 8 uns (2x4 ou 4x2)
  3. Retângulos com 4 uns (1x4, 4x1 ou 2x2)
  4. Retângulos com 2 uns (1x2 ou 2x1)
  5. Retângulos com apenas 1 um

  Importante: a última linha/coluna é adjacente à primeira linha/coluna.

Mapa de Karnaugh: como usar

Para até 4 variáveis:

- 1. Expresse a tabela verdade como uma matriz, com no máximo duas variáveis para as linhas/colunas. Em linhas adjacentes, apenas uma das variáveis muda (o mesmo vale para as colunas).
  Sugestão de rótulos para as linhas/colunas: 00, 01, 11, 10
- 2. Enquanto houver uma célula contendo 1 que não tiver sido agrupada, agrupe nesta ordem:
  1. Retângulos com 16 uns (**Obs.:** se houver, então $F = 1$)
  2. Retângulos com 8 uns (2x4 ou 4x2)
  3. Retângulos com 4 uns (1x4, 4x1 ou 2x2)
  4. Retângulos com 2 uns (1x2 ou 2x1)
  5. Retângulos com apenas 1 um

  Importante: a última linha/coluna é adjacente à primeira linha/coluna.
- 3. Elimine grupos redundantes (se puder)

Mapa de Karnaugh: como usar

Para até 4 variáveis:

- 1. Expresse a tabela verdade como uma matriz, com no máximo duas variáveis para as linhas/colunas. Em linhas adjacentes, apenas uma das variáveis muda (o mesmo vale para as colunas).
  Sugestão de rótulos para as linhas/colunas: 00, 01, 11, 10
- 2. Enquanto houver uma célula contendo 1 que não tiver sido agrupada, agrupe nesta ordem:
  1. Retângulos com 16 uns (**Obs.:** se houver, então $F = 1$)
  2. Retângulos com 8 uns (2x4 ou 4x2)
  3. Retângulos com 4 uns (1x4, 4x1 ou 2x2)
  4. Retângulos com 2 uns (1x2 ou 2x1)
  5. Retângulos com apenas 1 um

  Importante: a última linha/coluna é adjacente à primeira linha/coluna.
- 3. Elimine grupos redundantes (se puder)
- 4. Para cada grupo, escreva uma soma de produtos onde apenas as variáveis que não mudaram são representadas. **Importante:** Se, no grupo, uma variável X é mantida em 0, então escreva $\overline{X}$.

Mapa de Karnaugh: Exemplos

Exemplo 3: Simplifique $F(A,B,C,D)$, cuja tabela verdade é dada pelo mapa de Karnaugh ao lado.

$AB \backslash CD$	00	01	11	10
00	1	1	0	0
01	1	1	1	1
11	0	0	0	0
10	0	1	1	0

Exemplo 3: Simplifique $F(A,B,C,D)$, cuja tabela verdade é dada pelo mapa de Karnaugh ao lado.

$AB \backslash CD$	00	01	11	10
00	1	1	0	0
01	1	1	1	1
11	0	0	0	0
10	0	1	1	0

Resp.: $F = \overline{A}\,\overline{C} + \overline{A}\,B + A\,\overline{B}\,D$

Exemplo 3: Simplifique $F(A,B,C,D)$, cuja tabela verdade é dada pelo mapa de Karnaugh ao lado.

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	1	0	0
01	1	1	1	1
11	0	0	0	0
10	0	1	1	0

Resp.: $F = \overline{A}\,\overline{C} + \overline{A}\,B + A\,\overline{B}\,D$

Exemplo 4: Simplifique $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}\,C + A\,B\,\overline{C} + A\,\overline{B}\,\overline{C}$

Mapa de Karnaugh: Exemplos

Exemplo 3: Simplifique $F(A,B,C,D)$, cuja tabela verdade é dada pelo mapa de Karnaugh ao lado.

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	1	0	0
01	1	1	1	1
11	0	0	0	0
10	0	1	1	0

Resp.: $F = \overline{A}\,\overline{C} + \overline{A}\,B + A\,\overline{B}\,D$

Exemplo 4: Simplifique $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}\,C + A\,B\,\overline{C} + A\,\overline{B}\,\overline{C}$

Exemplo 5: Simplifique $\overline{A}\,\overline{B}\,C + \overline{A}\,B\,\overline{C} + A\,B\,\overline{C} + A\,B\,C$

Exemplo 3: Simplifique $F(A,B,C,D)$, cuja tabela verdade é dada pelo mapa de Karnaugh ao lado.

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	1	0	0
01	1	1	1	1
11	0	0	0	0
10	0	1	1	0

Resp.: $F = \overline{A}\,\overline{C} + \overline{A}\,B + A\,\overline{B}\,D$

Exemplo 4: Simplifique $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}\,C + A\,B\,\overline{C} + A\,\overline{B}\,\overline{C}$

Exemplo 5: Simplifique $\overline{A}\,\overline{B}\,C + \overline{A}\,B\,\overline{C} + A\,B\,\overline{C} + A\,B\,C$

Exemplo 6: Simplifique $A\,B\,C\,D + A\,B\,\overline{C}\,D + A\,B\,\overline{C}\,\overline{D} + A\,\overline{B}\,C\,D + \overline{A}\,B\,C\,D + \overline{A}\,B\,C\,\overline{D} + \overline{A}\,B\,\overline{C}\,D + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,D$

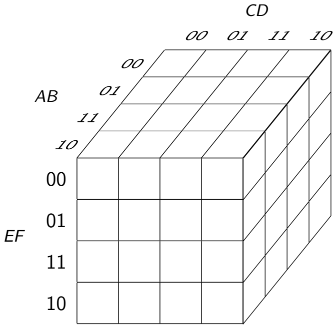
Mais de 4 variáveis

É possível construir mapas de Karnaugh para mais de 4 variáveis, mas eles se tornam difíceis de representar.

Mais de 4 variáveis

É possível construir mapas de Karnaugh para mais de 4 variáveis, mas eles se tornam difíceis de representar.

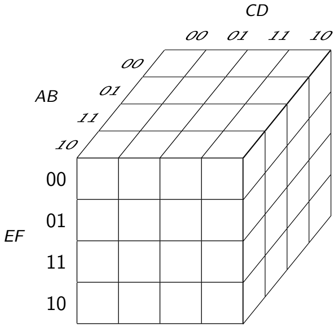
Para 6 variáveis, o mapa torna-se um cubo:



Mais de 4 variáveis

É possível construir mapas de Karnaugh para mais de 4 variáveis, mas eles se tornam difíceis de representar.

Para 6 variáveis, o mapa torna-se um cubo:

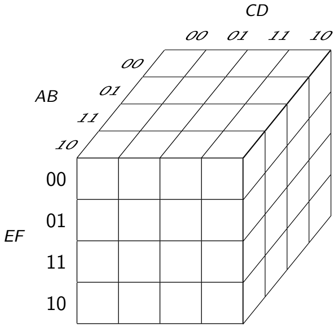


Entre 4 e 30 (aprox.) variáveis, é possível executar o **método de Quine-McCluskey**, que é exato mas possui complexidade exponencial.

Mais de 4 variáveis

É possível construir mapas de Karnaugh para mais de 4 variáveis, mas eles se tornam difíceis de representar.

Para 6 variáveis, o mapa torna-se um cubo:



Entre 4 e 30 (aprox.) variáveis, é possível executar o **método de Quine-McCluskey**, que é exato mas possui complexidade exponencial.
Acima de 30 variáveis, há o minimizador **Espresso**, baseado em métodos heurísticos (não exato).

Conclusão

O mapa de Karnaugh é um método de representar a tabela verdade de uma função lógica de tal modo que os termos de uma soma-de-produtos que podem ser simplificados estão sempre adjacentes.

Importante: Recomenda-se colocar as linhas/colunas nesta ordem: 00, 01, 11, 10. Sempre troque **apenas uma** variável a cada linha/coluna.

Conclusão

O mapa de Karnaugh é um método de representar a tabela verdade de uma função lógica de tal modo que os termos de uma soma-de-produtos que podem ser simplificados estão sempre adjacentes.

Importante: Recomenda-se colocar as linhas/colunas nesta ordem: 00, 01, 11, 10. Sempre troque **apenas uma** variável a cada linha/coluna.

Mapas de Karnaugh são fáceis de se usar para até 4 variáveis.

Conclusão

O mapa de Karnaugh é um método de representar a tabela verdade de uma função lógica de tal modo que os termos de uma soma-de-produtos que podem ser simplificados estão sempre adjacentes.

Importante: Recomenda-se colocar as linhas/colunas nesta ordem: 00, 01, 11, 10. Sempre troque **apenas uma** variável a cada linha/coluna.

Mapas de Karnaugh são fáceis de se usar para até 4 variáveis. Para 5 e 6 variáveis, é possível:

- Simplificar algebricamente, até obtermos 4 variáveis, e depois usar o mapa de Karnaugh.
  - Exemplo: simplifique $A\,B\,C\,D\,E + A\,B\,\overline{C}\,D\,E + A\,B\,\overline{C}\,\overline{D}\,E + A\,\overline{B}\,C\,D\,E + \overline{A}\,B\,C\,D\,E + \overline{A}\,B\,C\,\overline{D}\,E + \overline{A}\,B\,\overline{C}\,D\,E + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,D\,E$

Conclusão

O mapa de Karnaugh é um método de representar a tabela verdade de uma função lógica de tal modo que os termos de uma soma-de-produtos que podem ser simplificados estão sempre adjacentes.

Importante: Recomenda-se colocar as linhas/colunas nesta ordem: 00, 01, 11, 10. Sempre troque **apenas uma** variável a cada linha/coluna.

Mapas de Karnaugh são fáceis de se usar para até 4 variáveis. Para 5 e 6 variáveis, é possível:

- Simplificar algebricamente, até obtermos 4 variáveis, e depois usar o mapa de Karnaugh.
  - Exemplo: simplifique $A\,B\,C\,D\,E + A\,B\,\overline{C}\,D\,E + A\,B\,\overline{C}\,\overline{D}\,E + A\,\overline{B}\,C\,D\,E + \overline{A}\,B\,C\,D\,E + \overline{A}\,B\,C\,\overline{D}\,E + \overline{A}\,B\,\overline{C}\,D\,E + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,D\,E$
- Ou usar mapas de Karnaugh tridimensionais.

Conclusão

O mapa de Karnaugh é um método de representar a tabela verdade de uma função lógica de tal modo que os termos de uma soma-de-produtos que podem ser simplificados estão sempre adjacentes.

Importante: Recomenda-se colocar as linhas/colunas nesta ordem: 00, 01, 11, 10. Sempre troque **apenas uma** variável a cada linha/coluna.

Mapas de Karnaugh são fáceis de se usar para até 4 variáveis. Para 5 e 6 variáveis, é possível:

- Simplificar algebricamente, até obtermos 4 variáveis, e depois usar o mapa de Karnaugh.
  - Exemplo: simplifique $A\,B\,C\,D\,E + A\,B\,\overline{C}\,D\,E + A\,B\,\overline{C}\,\overline{D}\,E + A\,\overline{B}\,C\,D\,E + \overline{A}\,B\,C\,D\,E + \overline{A}\,B\,C\,\overline{D}\,E + \overline{A}\,B\,\overline{C}\,D\,E + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,D\,E$
- Ou usar mapas de Karnaugh tridimensionais.

A partir de 4 variáveis, costuma ser mais vantajoso usar outros métodos (Quine-McCluskey ou Espresso).

Para casa:

- Ler seções 4-6, 4-7, 4-8, 4-9 e o final do capítulo intitulado "Aplicações em sistemas digitais" (desprezar os comentários e diagramas sobre portas lógicas; nós veremos portas lógicas na próxima aula).
- Exercícios recomendados:
  - Autotestes: 12 a 16
  - Problemas: 21 a 44