Erro Relativo

- Relação entre o Erro Absoluto EA de um número e seu valor aproximado.

$$\mathrm{ER}_x = \frac{\mathrm{EA}_x}{\overline{x}} = \frac{x - \overline{x}}{\overline{x}}$$

- Exemplo anterior:

$$\begin{aligned}
\mathrm{ER}_x &= \tfrac{\mathrm{EA}_x}{\overline{x}} < \tfrac{0.1}{2112.9} \approx 4.7 \times 10^{-5} \\
\mathrm{ER}_y &= \tfrac{\mathrm{EA}_y}{\overline{y}} < \tfrac{0.1}{5.3} \approx 0.02
\end{aligned}$$

- **Conclusão**: x é representado com maior precisão que y.

Erro Absoluto versus Erro Relativo

- **Exemplo**: Calcular o valor de $x = (11\,111\,111)^2$
  - Calculadora com 5 dígitos:
    - $\overline{x} = 1.2345 \times 10^{14}$
  - Resultado exato:
    - $x = 123\,456\,787\,654\,321$
  - Erro Absoluto: $\text{EA}_x = x - \overline{x} = 6\,787\,654\,321 (\approx 6 \times 10^9)$
  - Erro Relativo: $\text{ER}_x = \frac{\text{EA}_x}{\overline{x}} = 0.0005\%$

Erros na Representação em Ponto Flutuante

- Seja um sistema de aritmética em ponto flutuante de t dígitos na base 10 e seja um número x escrito na forma

$$x = f_x \times 10^e + g_x \times 10^{e-t}$$

onde $0.1 \leq f_x < 1$ e $0 \leq g_x < 1$.

- **Exemplo**: Se $t = 4$ e $x = 234.57$, então

$$\begin{aligned} x = 0.23457 \times 10^3 &= 0.2345 \times 10^3 + 0.00007 \times 10^3 \\ &= \underbrace{0.2345}_{f_x} \times 10^3 + \underbrace{0.7}_{g_x} \times 10^{-1} \end{aligned}$$

- **Problema**: $g_x \times 10^{e-t}$ não pode ser incorporado *totalmente* à mantissa.

- **Solução**: Incorporar *parcialmente* essa parcela na mantissa e definir o erro absoluto/relativo máximo cometido.

Truncamento

- $g_x \times 10^{e-t}$ é desprezado e $\overline{x} = f_x \times 10^e$.
  - Erro Absoluto:

$$\begin{aligned} \text{EA}_x &= |x - \overline{x}| = |g_x| \times 10^{e-t} \\ \text{EA}_x &< 10^{e-t}, \text{ uma vez que } |g_x| < 1 \end{aligned}$$

  - Erro Relativo:

$$\begin{aligned} \text{ER}_x &= \frac{|\text{EA}_x|}{\overline{x}} = \frac{|g_x| \times 10^{e-t}}{f_x \times 10^e} \\ \text{ER}_x &< \frac{10^{e-t}}{0.1 \times 10^e} = 10^{-t+1}, \text{ uma vez que } f_x \geq 0.1 \end{aligned}$$

Arredondamento

- Uma parcela de g_x é incorporada à f_x.

- Arredondamento simétrico:

$$\overline{x} = \begin{cases} f_x \times 10^e & \text{se } |g_x| < \frac{1}{2} \\ f_x \times 10^e + 10^{e-t} & \text{se } |g_x| \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

  - **Portanto**:

    se $|g_x| < \frac{1}{2}$

    g_x é desprezado

    caso contrário

    somamos 1 à última decimal conservada de f_x.

Arredondamento

- Se $|g_x| < \frac{1}{2}$
  - Erro Absoluto:

$$
\begin{aligned}
|\mathsf{EA}_x| &= |x - \overline{x}| = |g_x| \times 10^{e-t} \\
|\mathsf{EA}_x| &< \frac{1}{2} \times 10^{e-t}
\end{aligned}
$$

  - Erro Relativo:

$$
\begin{aligned}
\mathsf{ER}_x &= \frac{|\mathsf{EA}_x|}{\overline{x}} = \frac{|g_x| \times 10^{e-t}}{f_x \times 10^{e}} \\
\mathsf{ER}_x &< \frac{0.5 \times 10^{e-t}}{0.1 \times 10^{e}} = \frac{1}{2} \times 10^{-t+1}
\end{aligned}
$$

Arredondamento

- Se $|g_x| \geq \frac{1}{2}$
  - Erro Absoluto:

$$
\begin{aligned}
|\mathsf{EA}_x| &= |x - \overline{x}| = |(f_x \times 10^e + g_x \times 10^{e-t}) - (f_x \times 10^e + 10^{e-t})| \\
&= |g_x \times 10^{e-t} - 10^{e-t}| = |g_x - 1| \times 10^{e-t} \\
|\mathsf{EA}_x| &\leq \frac{1}{2} \times 10^{e-t}
\end{aligned}
$$

  - Erro Relativo:

$$
\begin{aligned}
\mathsf{ER}_x &= \frac{|\mathsf{EA}_x|}{\overline{x}} \leq \frac{0.5 \times 10^{e-t}}{|f_x \times 10^e + 10^{e-t}|} < \frac{0.5 \times 10^{e-t}}{|f_x \times 10^e|} \\
\mathsf{ER}_x &< \frac{0.5 \times 10^{e-t}}{|0.1 \times 10^e|} = \frac{1}{2} \times 10^{-t+1}
\end{aligned}
$$

Arredondamento

- Em qualquer caso teremos:

$$
\begin{aligned}
|\mathsf{EA}_x| &\leq \frac{1}{2} \times 10^{e-t} \\
&\text{e} \\
|\mathsf{ER}_x| &< \frac{1}{2} \times 10^{-t+1}
\end{aligned}
$$

- **Constatação**: Arredondamento
  - menores erros;
  - maior tempo de execução.
- **Consequência**: Truncamento
  - mais utilizado.

Aritmética de Ponto Flutuante

- Adição e Subtração em Ponto Flutuante:
  - $x \oplus y = pf(pf(x) + pf(y))$
  - $x \ominus y = pf(pf(x) - pf(y))$
  - para somar ou subtrair, os números devem ter o mesmo expoente:
    - alinha-se de forma a tornar o menor expoente igual ao maior,
    - viola-se temporariamente a regra em que o primeiro dígito da mantissa deve ser diferente de zero.
- Multiplicação e Divisão em Ponto Flutuante:
  - $x \otimes y = pf(pf(x) \times pf(y))$
  - $x \oslash y = pf(pf(x) \; / \; pf(y))$

Aritmética de Ponto Flutuante

- Características:
  - Precisão da máquina:
    - Erro relativo da representação em ponto flutuante (δ);
    - Seja X um número em ponto flutuante e δ a precisão da máquina. O erro sobre X é da ordem de $X \times \delta$.
  - Associatividade:
    - Adição: $x \oplus (y \oplus z) \neq (x \oplus y) \oplus z$
    - Multiplicação: $x \otimes (y \otimes z) \neq (x \otimes y) \otimes z$
  - Distributividade da Multiplicação em relação à Adição: $x \otimes (y \oplus z) \neq (x \otimes y) \oplus (x \otimes z)$
  - Fórmulas Equivalentes $\Longrightarrow$ Resultados Diferentes
    - Duas expressões algebricamente equivalentes podem, em um computador, fornecer resultados diferentes e a ordem das operações pode alterar os resultados.

- Erro nas Operações Aritméticas:
  - O erro total em uma operação é composto pelo erro das parcelas ou fatores **e** pelo erro no resultado da operação.
  - Sejam x e y tais que $x = \overline{x} + EA_x$ e $y = \overline{y} + EA_y$.
- Adição
  - Erro Absoluto:

$$\begin{aligned} x + y &= (\overline{x} + EA_x) + (\overline{y} + EA_y) = (\overline{x} + \overline{y}) + (EA_x + EA_y) \\ EA_{x+y} &= EA_x + EA_y \end{aligned}$$

  - Erro Relativo:

$$\begin{aligned} ER_{x+y} &= \frac{EA_{x+y}}{\overline{x} + \overline{y}} = \frac{EA_x}{\overline{x}} \left(\frac{\overline{x}}{\overline{x} + \overline{y}} \right) + \frac{EA_y}{\overline{y}} \left(\frac{\overline{y}}{\overline{x} + \overline{y}} \right) \\ &= ER_x \left(\frac{\overline{x}}{\overline{x} + \overline{y}} \right) + ER_y \left(\frac{\overline{y}}{\overline{x} + \overline{y}} \right) \end{aligned}$$

- Subtração

  - Erro Absoluto:

$$EA_{x-y} \quad = \quad EA_x - EA_y$$

  - Erro Relativo:

$$ER_{x-y} = \frac{EA_x - EA_y}{\overline{x} - \overline{y}} = ER_x \left(\frac{\overline{x}}{\overline{x} - \overline{y}} \right) - ER_y \left(\frac{\overline{y}}{\overline{x} - \overline{y}} \right)$$

- Multiplicação

  - Erro Absoluto

$$\begin{aligned} xy \quad &= \quad (\overline{x} + EA_x)(\overline{y} + EA_y) = \overline{xy} + \overline{x}EA_y + \overline{y}EA_x + EA_xEA_y \\ EA_{xy} \quad &= \quad \overline{x}EA_y + \overline{y}EA_x \end{aligned}$$

  - Erro Relativo:

$$ER_{xy} \quad = \quad \frac{\overline{x}EA_y + \overline{y}EA_x}{\overline{xy}} = \frac{EA_x}{\overline{x}} + \frac{EA_y}{\overline{y}} = ER_x + ER_y$$

Aritmética de Ponto Flutuante

- Divisão

  - Erro Absoluto:

$$
\begin{aligned}
\frac{x}{y} &= \frac{\overline{x}+EA_x}{\overline{y}+EA_y} = \frac{\overline{x}+EA_x}{\overline{y}}\left(\frac{1}{1+\frac{EA_y}{\overline{y}}}\right) \\
& \quad \frac{1}{1+\frac{EA_y}{\overline{y}}} = 1 - \frac{EA_y}{\overline{y}} + \left(\frac{EA_y}{\overline{y}}\right)^2 - \left(\frac{EA_y}{\overline{y}}\right)^3 + \ldots \\
\frac{x}{y} &\approx \frac{\overline{x}+EA_x}{\overline{y}}\left(1-\frac{EA_y}{\overline{y}}\right) = \frac{\overline{x}}{\overline{y}} + \frac{EA_x}{\overline{y}} + \frac{\overline{x}EA_y}{\overline{y}^2} - \frac{EA_xEA_y}{\overline{y}^2} \\
\frac{x}{y} &\approx \frac{\overline{x}}{\overline{y}} + \frac{EA_x}{\overline{y}} + \frac{\overline{x}EA_y}{\overline{y}^2} \\
EA_{x/y} &= \frac{EA_x}{\overline{y}} + \frac{\overline{x}EA_y}{\overline{y}^2} = \frac{\overline{y}EA_x - \overline{x}EA_y}{\overline{y}^2}
\end{aligned}
$$

  - Erro Relativo:

$$
ER_{x/y} = \left(\frac{\overline{y}EA_x - \overline{x}EA_y}{\overline{y}^2}\right)\frac{\overline{y}}{\overline{x}} = \frac{EA_x}{\overline{x}} - \frac{EA_y}{\overline{y}} = ER_x - ER_y
$$

Aritmética de Ponto Flutuante

- Propagação de erros
  - **Adição e Subtração**: o erro absoluto da operação é a soma dos erros absolutos das parcelas.
  - **Multiplicação e Divisão**: o erro relativo da operação é a soma dos erros relativos das parcelas.
- São as operações de adição e subtração que geram mais problemas nas operações de ponto flutuante.
- Cancelamento subtrativo:

$$ER_{x-y} = |ER_x| \left(\frac{\overline{x}}{\overline{x} - \overline{y}} \right) + |ER_y| \left(\frac{\overline{y}}{\overline{x} - \overline{y}} \right)$$

Se $x \approx y$, ER_{x-y} pode ser muito grande.