

Cálculo Numérico

Módulo V

Resolução Numérica de Sistemas Lineares – Parte I

Profs.: Bruno Correia da Nóbrega Queiroz
José Eustáquio Rangel de Queiroz
Marcelo Alves de Barros





Sistemas Lineares

■ Forma Geral

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \cdot \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n$$

onde:

a_{ij} → coeficientes

x_i → incógnitas

b_i → termos independentes



Sistemas Lineares

■ Exemplo 01

$$2x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 5$$

$$4x_1 + 1x_2 - 5x_3 = 2$$

$$2x_1 + 4x_2 + 5x_3 = -1$$

2, 4, -5, 4, 1, -5, 2, 4 e 5 → coeficientes

x_1, x_2 e x_3 → incógnitas

5, 2 e -1 → termos independentes



Sistemas Lineares

- Forma Matricial

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

na qual:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} & \dots & \mathbf{a}_{1n} \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22} & \dots & \mathbf{a}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{a}_{n1} & \mathbf{a}_{n2} & \mathbf{a}_{n3} & \mathbf{a}_{nn} \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n \end{bmatrix}$$



Sistemas Lineares

■ Exemplo 02

▶ Forma Geral

$$2x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 5$$

$$4x_1 + 1x_2 - 5x_3 = 2$$

$$2x_1 + 4x_2 + 5x_3 = -1$$

▶ Forma Matricial

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -5 \\ 4 & 1 & -5 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$



Sistemas Lineares

■ Classificação I

▶ **Impossível** → **Não** possui solução

● Exemplo 03

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ 2x_1 + 2x_2 = 9 \end{cases}$$



Sistemas Lineares

- **Classificação II**

- ▶ **Possível** → Possui 1 ou mais soluções

- **Determinado** → Solução **única**

- ◆ **Exemplo 04**

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 - x_2 = 8 \end{cases}$$



Sistemas Lineares

- **Classificação III**

- ▶ **Possível** → Possui 1 ou mais soluções

- **Indeterminado** → **Mais de uma** solução

- ◆ **Exemplo 05**

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ 2x_1 + 2x_2 = 8 \end{cases}$$



Sistemas Lineares

■ Classificação IV

▶ **Possível** → Possui 1 ou mais soluções

● **Homogêneo** → Vetor **b=0** (x=0 sempre existe solução)

◆ **Exemplo 06**

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases}$$



Sistemas Lineares

- **Sistemas Triangulares:**

- ▶ **Possibilidade de resolução de forma Direta**

- **Inferior**

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$



Sistemas Lineares

- **Sistemas Triangulares:**

- ▶ **Possibilidade de resolução de forma Retroativa**

- **Superior**

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$



Solução Retroativa

- **Exemplo 7:**

- ▶ **Dado o sistema:**

$$\begin{array}{rcccccl} 3x_1 & +4x_2 & -5x_3 & +x_4 & = & -10 \\ & x_2 & +x_3 & -2x_4 & = & -1 \\ & & 4x_3 & -5x_4 & = & 3 \\ & & & 2x_4 & = & 2 \end{array}$$

- ▶ **Primeiro passo para sua resolução:**

$$x_4 = \frac{2}{2} = 1$$



Solução Retroativa

- **Exemplo 7:**

- ▶ **Segundo passo:**

$$4x_3 - 5x_4 = 3$$

$$4x_3 - 5 \cdot 1 = 3$$

$$x_3 = 2$$

- ▶ **Terceiro passo:**

$$x_2 + x_3 - 2x_4 = -1$$

$$x_2 + 2 - 2 \cdot 1 = -1$$

$$x_2 = -1$$



Solução Retroativa

- **Exemplo 7:**

- ▶ **Último passo:**

$$3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + x_4 = -10$$

$$3x_1 + 4 \cdot (-1) - 5 \cdot 2 + 1 = -10$$

$$x_1 = 1$$



Métodos Numéricos

■ Diretos

- ▶ Solução pode ser encontrada a partir de um número finito de passos
 - Método de Gauss
 - Método da Eliminação de Jordan
 - Fatoração LU



Métodos Numéricos

■ Iterativos

- ▶ Solução a partir de uma **seqüência de aproximações** para o valor do vetor solução **x** , até que seja obtido um valor que satisfaça à precisão pré-estabelecida
 - **Método de Jacobi**
 - **Método de Gauss – Seidel**



Método de Gauss

- **Propósito**

- ▶ **Transformação do sistema linear a ser resolvido em um sistema linear triangular;**
- ▶ **Resolução do sistema linear triangular de forma retroativa.**



Método de Gauss

- **Transformação do Sistema Linear**
 - ▶ **Troca da ordem das linhas;**
 - ▶ **Multiplicação de uma das equações por um número real não nulo;**
 - ▶ **Substituição de uma das equações por uma combinação linear dela mesma com outra equação.**



Método de Gauss

- **Passos do Método de Gauss**

- ▶ **Construção da matriz aumentada Ab**

$$[Ab] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{nn} & b_n \end{array} \right]$$



Método de Gauss

■ Passos do Método de Gauss

▶ Passo 1:

- **Eliminar os coeficientes de x_1** presentes nas linhas $2, 3, \dots, n$ - sendo $a_{21} = a_{31}, = \dots = a_{n1} = 0$ - sendo a_{11} chamado de **pivô da coluna**
- **Substituir a linha 2, L_2 , pela combinação linear**

$$L_2 - m_{21} \cdot L_1, \text{ na qual: } m_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}}$$



Método de Gauss

- **Passos do Método de Gauss**

- ▶ **Substituir a linha 3, L_3 , pela combinação linear:**

$$L_3 = L_3 - m_{31} \cdot L_1, \text{ na qual: } m_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}}$$



Método de Gauss

- **Passos do Método de Gauss**

- ▶ **Continuar a substituição até a linha n ;**
- ▶ **Caso algum elemento $a_{pp}=0$, achar outra linha k onde $a_{kp} \neq 0$ e trocar tais linhas. Caso a linha k não exista, o sistema linear **não** possui solução.**



Método de Gauss

■ Passos do Método de Gauss

- ▶ Eliminar os coeficientes de x_2 nas linhas 3, 4, ..., n (fazer $a_{32} = a_{42} = \dots = a_{n2} = 0$);
- ▶ Eliminar os coeficientes de x_3 nas linhas 4, 5, ..., n (fazer $a_{43} = a_{53} = \dots = a_{n3} = 0$) e assim sucessivamente.



Método de Gauss

- **Exemplo 8:**

- ▶ **Resolver o sistema:**

$$2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5$$

$$4x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 3$$

$$2x_1 - 3x_2 + x_3 = -1$$

- **Matriz aumentada Ab**

$$[Ab] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 4 & 4 & -3 & 3 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \end{array} \right]$$



Método de Gauss

■ Exemplo 8:

▶ Faz-se:

$$L_2 = L_2 - m_{21} \cdot L_1, \quad m_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = 2$$

▶ Assim:

$$L_2 = [4 \quad 4 \quad -3 \quad 3] - 2 \cdot [2 \quad 3 \quad -1 \quad 5]$$

$$L_2 = [0 \quad -2 \quad -1 \quad -7]$$



Método de Gauss

■ Exemplo 8:

▶ Faz-se:

$$L_3 = L_3 - m_{31} \cdot L_1, \quad m_{23} = \frac{a_{31}}{a_{11}} = 1$$

▶ Assim:

$$L_3 = [2 \quad -3 \quad 1 \quad -1] - 1 \cdot [2 \quad 3 \quad -1 \quad 5]$$

$$L_3 = [0 \quad -6 \quad 2 \quad -6]$$



Método de Gauss

- **Exemplo 8:**

▶ **Obtém-se a matriz:**

$$[Ab] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & -1 & -7 \\ 0 & -6 & 2 & -6 \end{array} \right]$$



Método de Gauss

- **Exemplo 8:**

- ▶ **Substituindo a linha 3 por:**

$$L_3 = L_3 - m_{32} \cdot L_2, \quad m_{32} = \frac{a_{32}}{a_{22}} = 3$$

- ▶ **Têm-se:**

$$L_3 = [0 \quad -6 \quad 2 \quad -6] - 3 \cdot [0 \quad -2 \quad -1 \quad -7]$$

$$L_3 = [0 \quad 0 \quad 5 \quad 15]$$



Método de Gauss

- **Exemplo 8:**

- ▶ **A matriz [Ab] fica assim com os seguintes valores:**

$$[Ab] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 5 & 15 \end{array} \right]$$



Método de Gauss

- **Exemplo 8:**

▶ **Usa-se a solução retroativa:**

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{5x_3 = 15 \Rightarrow x_3 = 3} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\mathbf{2x_2 - x_3 = -7 \Rightarrow -2x_2 - 3 = 7 \Rightarrow x_2 = 2} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{2x_1 + 3 \cdot x_2 - x_3 = 5 \Rightarrow} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow \mathbf{2x_1 + 6 - 3 = 5 \Rightarrow 2x_1 = 2 \Rightarrow x_1 = 1} \end{array} \right.$$



Método de Gauss

■ Exemplo 9:

▶ Resolver o sistema.

$$1,5x_1 + 5,4x_2 + 3,3x_3 = 10$$

$$4,2x_1 + 2,3x_2 + 4,5x_3 = 11,7$$

$$2,7x_1 + 5,7x_2 + 7,8x_3 = 8,9$$

▶ Representando o sistema pela matriz aumentada:

$$[AB] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1,5 & 5,4 & 3,3 & 10 \\ 4,2 & 2,3 & 4,5 & 11,7 \\ 2,7 & 5,7 & 7,8 & 8,9 \end{array} \right]$$



Método de Gauss

■ Exemplo 9:

- ▶ Escolhendo a primeira linha como pivô, obtém-se:

$$\mathbf{L}_2 = \mathbf{L}_2 - m_{21} \cdot \mathbf{L}_1 = [4,2 \quad 2,3 \quad 4,5 \quad 11,7] - (4,2/1,5) \cdot [1,5 \quad 5,4 \quad 3,3 \quad 10]$$

$$\mathbf{L}_2 = [0 \quad -12,82 \quad -4,74 \quad -16,3]$$

$$\mathbf{L}_3 = \mathbf{L}_3 - m_{31} \cdot \mathbf{L}_1 = [2,7 \quad 5,7 \quad 7,8 \quad 8,9] - (2,7/1,5) \cdot [1,5 \quad 5,4 \quad 3,3 \quad 10]$$

$$\mathbf{L}_3 = [0 \quad -4,02 \quad -1,86 \quad -9,1]$$



Método de Gauss

- **Exemplo 9:**

- ▶ **Representando o sistema pela matriz aumentada:**

$$[AB] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1,5 & 5,4 & 3,3 & 10 \\ 0 & -12,82 & -4,74 & -16,3 \\ 0 & -4,02 & -1,86 & -9,1 \end{array} \right]$$



Método de Gauss

- **Exemplo 9:**

- ▶ **Escolhendo agora a segunda linha como pivô, têm-se:**

$$\mathbf{L}_3 = \mathbf{L}_3 - m_{32} \cdot \mathbf{L}_1$$

$$\mathbf{L}_3 = \begin{bmatrix} 0 & -4,02 & -1,86 & -9,1 \end{bmatrix} -$$
$$\left(-4,02 / -12,82 \right) \cdot \begin{bmatrix} 0 & -12,82 & -4,74 & -16,3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3,3463 & -3,9888 \end{bmatrix}$$



Método de Gauss

- **Exemplo 9:**

▶ **Obtêm-se a seguinte matriz ampliada:**

$$[AB] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1,5 & 5,4 & 3,3 & 10 \\ 0 & -12,82 & -4,74 & -16,3 \\ 0 & 0 & 3,3463 & -3,9888 \end{array} \right]$$



Método de Gauss

- **Exemplo 9:**

- ▶ **O que termina com a triangulação:**

$$\begin{cases} 1,5x_1 + 5,4 \cdot x_2 + 3,3 \cdot x_3 = 10 \\ 0 \cdot x_1 - 12,82 \cdot x_2 - 4,74 \cdot x_3 = -16,3 \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 3,3463 \cdot x_3 = -3,9888 \end{cases}$$



Método de Gauss

- **Exemplo 9:**

- ▶ **Com solução:**

$$x_3 = -3,9888/3,3463 = -1,1918$$

$$x_2 = [-16,3 - (-4,74) \cdot (-1,1920)] / (-12,82) = 1,7121$$

$$x_1 = [10 - 5,4(1,7122) - 3,3(-1,1920)] / 1,5 = 3,1251$$



Método do Pivoteamento Parcial

- **Semelhante ao método de Gauss;**
- **Minimiza a amplificação de erros de arredondamento durante as eliminações;**
- **Consiste em escolher o elemento de maior módulo em cada coluna para ser o pivô.**



Método do Pivoteamento Parcial

- **Exemplo 10:**

- ▶ **Resolver o sistema com precisão de 4 casas decimais**

$$1,5x_1 + 5,4x_2 + 3,3x_3 = 10$$

$$4,2x_1 + 2,3x_2 + 4,5x_3 = 11,7$$

$$2,7x_1 + 5,7x_2 + 7,8x_3 = 8,9$$

Método do Pivoteamento Parcial

■ Exemplo 10:

- ▶ Matriz aumentada original deve ser ajustada:

$$\begin{bmatrix} 1,5 & 5,4 & 3,3 & | & 10 \\ 4,2 & 2,3 & 4,5 & | & 11,7 \\ 2,7 & 5,7 & 7,8 & | & 8,9 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{green arrow}} \begin{bmatrix} 4,2 & 2,3 & 4,5 & | & 11,7 \\ 1,5 & 5,4 & 3,3 & | & 10 \\ 2,7 & 5,7 & 7,8 & | & 8,9 \end{bmatrix}$$

Note: An orange arrow points to the first row of the resulting matrix.



Método do Pivoteamento Parcial

■ Exemplo 10:

▶ Sistema inalterado, elemento pivô **4,2**.

▶ Encontrar as novas linhas:

$$L_2 = L_2 - m_{21} \cdot L_1 = [1,5 \quad 5,4 \quad 3,3 \quad 10] - (1,5/4,2) \cdot [4,2 \quad 2,3 \quad 4,5 \quad 11,7]$$

$$L_2 = [0 \quad 4,5786 \quad 1,6929 \quad 5,8214]$$

$$L_3 = L_3 - m_{31} \cdot L_1 = [2,7 \quad 5,7 \quad 7,8 \quad 8,9] - (2,7/4,2) \cdot [4,2 \quad 2,3 \quad 4,5 \quad 11,7]$$

$$L_3 = [0 \quad 4,2214 \quad 4,9071 \quad 1,3786]$$

Método do Pivoteamento Parcial

■ Exemplo 10:

▶ A matriz ampliada fica da forma:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4,2 & 2,3 & 4,5 & 11,7 \\ 0 & 4,5786 & 1,6929 & 5,8214 \\ 0 & 4,2214 & 4,9071 & 1,3786 \end{array} \right]$$

▶ Como o elemento **4,5786** já é o pivô da 2ª coluna, tem-se:

$$\mathbf{L}_3 = \mathbf{L}_3 - m_{32} \cdot \mathbf{L}_2 = [0 \quad 4,2214 \quad 4,9071 \quad 1,3786] - (4,2214/4,5786) \cdot [0 \quad 4,5786 \quad 1,6929 \quad 5,8214]$$

$$\mathbf{L}_3 = [0 \quad 0 \quad 3,3463 \quad -3,9886]$$



Método do Pivoteamento Parcial

- **Exemplo 10:**

- ▶ **A matriz ampliada fica na forma:**

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4,2 & 2,3 & 4,5 & 11,7 \\ 0 & 4,5786 & 1,6929 & 5,8214 \\ 0 & 0 & 3,3463 & -3,9886 \end{array} \right]$$



Método do Pivoteamento Parcial

■ Exemplo 10:

▶ A solução do sistema triangular que resultou dessas operações é:

$$x_3 = -3,9886/3,3463 = -1,1919$$

$$x_2 = [5,8214 - 1,6929 \cdot (-1,1919)] / (4,5786) = 1,7121$$

$$x_1 = [11,7 - 2,3(1,7121) - 4,5(-1,1919)] / 4,2 = 3,1252$$



Método do Pivoteamento Parcial

Exemplo 9: Exemplo 10 (com pivoteamento):

$$x_3 = -1,1918$$

$$x_3 = -1,1919$$

$$x_2 = 1,7121$$

$$x_2 = 1,7121$$

$$x_1 = 3,1252$$

$$x_1 = 3,1251$$

Solução encontrada no Matlab:

$$x_1 = -1,19198135198135$$

$$x_2 = 1,71216783216783$$

$$x_3 = 3,12522144522145$$



Método de Jordan

- Consiste em efetuar operações sobre as equações do sistema, com a finalidade de obter um sistema diagonal equivalente;
- Um sistema diagonal é aquele em que os elementos a_{ij} da matriz coeficiente $[A]$ são iguais a zero, para $i \neq j$,

$$i, j = 1, 2, \dots, n.$$



Método de Jordan

- Sistema diagonal equivalente:

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$



Método de Jordan

■ Exemplo 11:

▶ A partir do sistema:

$$x_1 + 5x_2 + x_3 = 1$$

$$5x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2$$

$$2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 4$$

▶ Com matriz aumentada:

$$[Ab] = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$



Método de Jordan

■ Exemplo 11:

▶ Substituindo a linha 2 por:

$$\mathbf{L}_2 = \mathbf{L}_2 - m_{21} \cdot \mathbf{L}_1 = [1 \ 5 \ 1 \ 1] - (1/5) \cdot [5 \ 2 \ 3 \ 2],$$

$$\mathbf{L}_2 = [0 \ 4,6 \ 0,4 \ 0,6], \quad m_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = 1/5 = 0,2$$

▶ Substituindo a linha 3 por :

$$\mathbf{L}_3 = \mathbf{L}_3 - m_{31} \cdot \mathbf{L}_1 = [2 \ 3 \ 2 \ 4] - (2/5) \cdot [5 \ 2 \ 3 \ 2]$$

$$\mathbf{L}_3 = [0 \ 2,2 \ 0,8 \ 3,2], \quad m_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}} = 2/5 = 0,4$$



Método de Jordan

■ Exemplo 11:

▶ A matriz ampliada resulta em:

$$[Ab] = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 4,6 & 0,4 & 0,6 \\ 0 & 2,2 & 0,8 & 3,2 \end{bmatrix}$$

▶ Substituindo a linha 3 por:

$$L_3 = L_3 - m_{32} \cdot L_2 = [0 \quad 2,2 \quad 0,8 \quad 3,2] - (2,2/4,6) \cdot [0 \quad 4,6 \quad 0,4 \quad 0,6]$$

$$L_3 = [0 \quad 0 \quad 0,609 \quad 2,913], \quad m_{32} = \frac{a_{32}}{a_{22}} = 2,2/4,6 = 0,478$$



Método de Jordan

■ Exemplo 11:

▶ A matriz ampliada resulta em:

$$[Ab] = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4,6 & 0,4 & 0,6 \\ 0 & 0 & 0,609 & 2,913 \end{bmatrix}$$

▶ Substituindo a linha 2 por

$$L_2 = L_2 - m_{23} \cdot L_3 = [0 \ 4,6 \ 0,4 \ 0,6] - (0,4/0,609) \cdot [0 \ 0 \ 0,609 \ 2,913]$$

$$L_2 = [0 \ 4,6 \ 0 \ -1,313]$$



Método de Jordan

■ Exemplo 11:

▶ Matriz ampliada resulta em:

$$[Ab] = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4,6 & 0 & -1,313 \\ 0 & 0 & 0,609 & 2,913 \end{bmatrix}$$

▶ Substituindo a linha 1 por

$$L_1 = [5 \quad 2 \quad 3 \quad 1] - (2/4,6) \cdot [0 \quad 4,6 \quad 0 \quad -1,313],$$

$$L_1 = [5 \quad 0 \quad 3 \quad 1,571], \quad m_{12} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = 2/4,6$$



Método de Jordan

■ Exemplo 11:

▶ Substituindo a linha 1 por:

$$L_1 = [5 \quad 0 \quad 3 \quad 1,571] - \\ (3/0,609) \cdot [0 \quad 0 \quad 0,609 \quad 2,913]$$

$$L_1 = [5 \quad 0 \quad 0 \quad -12,779] \quad m_{13} = \frac{a_{13}}{a_{33}} = 3/0,609$$

▶ A matriz ampliada fica da seguinte forma:

$$[Ab] = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & -12,779 \\ 0 & 4,6 & 0 & -1,313 \\ 0 & 0 & 0,609 & 2,913 \end{bmatrix}$$



Método de Jordan

- **Exemplo 11:**

- ▶ **E as soluções são:**

- $x_1 = -2,556$, $x_2 = -0,285$, $x_3 = 4,783$

Decomposição em LU

- O objetivo é fatorar a matriz dos coeficientes **A** em um produto de duas matrizes **L** e **U**.

▶ Seja:

$$[LU] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \dots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

Decomposição em LU

- E a matriz coeficiente A:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{nn} \end{bmatrix}$$

▶ Tem-se, então:

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{nn} \end{bmatrix} = [LU] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \dots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{bmatrix}$$



Decomposição em LU

- Para se obter os elementos da matriz **L** e da matriz **U**, deve-se calcular os elementos das linhas de **U** e os elementos das colunas de **L** como segue.

Decomposição em LU

- **1ª linha de U:** Faze-se o **produto** da **1ª** linha de **L** por **todas** as colunas de **U** e a iguala com todos os elementos da **1ª** linha de **A**, assim:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{1} \cdot \mathbf{u}_{11} = \mathbf{a}_{11} \Rightarrow \mathbf{u}_{11} = \mathbf{a}_{11}, \\ \mathbf{1} \cdot \mathbf{u}_{12} = \mathbf{a}_{12} \Rightarrow \mathbf{u}_{12} = \mathbf{a}_{12}, \\ \quad \quad \quad \vdots \\ \mathbf{1} \cdot \mathbf{u}_{1n} = \mathbf{a}_{1n} \Rightarrow \mathbf{u}_{1n} = \mathbf{a}_{1n}, \\ \mathbf{u}_{1j} = \mathbf{a}_{1j}, j = \mathbf{1}, \mathbf{2}, \dots, \mathbf{n}. \end{array} \right.$$

Decomposição em LU

- **1ª coluna de L:** Faz-se o produto de todas as linhas de L, (da **2ª** a até a **nª**), pela **1ª** coluna de U e a iguala com os elementos da **1ª** coluna de A, (**abaixo da diagonal principal**), obtendo ,

$$\left\{ \begin{array}{l} l_{21} \cdot u_{11} = a_{21} \Rightarrow l_{21} = \frac{a_{21}}{u_{11}}, \\ l_{31} \cdot u_{11} = a_{31} \Rightarrow l_{31} = \frac{a_{31}}{u_{11}}, \\ \quad \quad \quad \vdots \\ l_{l1} \cdot u_{11} = a_{l1} \Rightarrow l_{l1} = \frac{a_{l1}}{u_{11}}, \\ l_{l1} = \frac{a_{l1}}{u_{11}}, l = 1, 2, \dots, n. \end{array} \right.$$

Decomposição em LU

- **2ª linha de U:** Faz-se o produto da 2ª linha de L por todas as colunas de U, (da **2ª** até a **nª**), e igualando com os elementos da 2ª linha de A, (**da diagonal principal em diante**), obtêm-se ,

$$\left\{ \begin{array}{l} l_{21} \cdot u_{12} + u_{22} = a_{22} \Rightarrow u_{22} = a_{22} - l_{21} \cdot u_{12}, \\ l_{21} \cdot u_{13} + u_{23} = a_{23} \Rightarrow u_{23} = a_{23} - l_{21} \cdot u_{13}, \\ \quad \quad \quad \vdots \\ l_{21} \cdot u_{1n} + u_{2n} = a_{2n} \Rightarrow u_{2n} = a_{2n} - l_{21} \cdot u_{1n}, \\ u_{2j} = a_{2j} - l_{21} \cdot u_{1j}, j = 3, \dots, n. \end{array} \right.$$

Decomposição em LU

- **2ª coluna de L:** Faz-se o produto de todas as linhas de L (da **3ª** até a **nª**) pela 2ª coluna de U e a iguala com os elementos da 2ª coluna de A, (**abaixo da diagonal principal**), obtendo ,

$$\left\{ \begin{array}{l} l_{31} \cdot u_{12} + l_{32} \cdot u_{22} = a_{32} \Rightarrow l_{32} = \frac{a_{32} - l_{31} \cdot u_{12}}{u_{22}}, \\ l_{41} \cdot u_{12} + l_{42} \cdot u_{22} = a_{42} \Rightarrow l_{42} = \frac{a_{42} - l_{41} \cdot u_{12}}{u_{22}}, \\ \vdots \\ l_{l1} \cdot u_{12} + l_{l2} \cdot u_{22} = a_{l2} \Rightarrow l_{l2} = \frac{a_{l2} - l_{l1} \cdot u_{12}}{u_{22}}, \\ l_{l2} = \frac{a_{l2} - l_{l1} \cdot u_{12}}{u_{22}}, l = 3, \dots, n. \end{array} \right.$$



Decomposição em LU

- Temos a seguinte fórmula geral:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u}_{lj} = \mathbf{a}_{lj} - \sum_{k=1}^{l-1} \mathbf{l}_{lk} \cdot \mathbf{u}_{kj}, \quad l \leq j, \\ \mathbf{l}_{lj} = (\mathbf{a}_{lj} - \sum_{k=1}^{l-1} \mathbf{l}_{lk} \cdot \mathbf{u}_{kj}) / \mathbf{u}_{jj}, \quad l > j. \end{array} \right.$$



Decomposição em LU

- **Resumo de Passos:**

- ▶ **Seja um sistema $Ax = b$ de ordem n , onde A satisfaz as condições da fatoração LU.**
- ▶ **Então, o sistema $Ax = b$ pode ser escrito como:**
 - **$LUX = b$**



Decomposição em LU

- **Resumo dos Passos:**

- ▶ Fazendo $Ux = y$, a equação acima reduz-se a $Ly = b$.
- ▶ Resolvendo o sistema triangular inferior $Ly = b$, obtém-se o vetor y .



Decomposição em LU

- **Resumo dos Passos:**

- ▶ **Substituição do valor de y no sistema $Ux = y \Rightarrow$ Obtenção de um sistema triangular superior cuja solução é o vetor x procurado;**
- ▶ **Aplicação da fatoração LU na resolução de sistemas lineares \Rightarrow Necessidade de solução de dois sistemas triangulares**

Erros - Avaliação de Erros

- No sistema $A \cdot x = b$, no qual:

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

o erro da solução é $x - x'$.



Erros - Avaliação de Erros

- **Procedimento de Determinação do Erro**

- ▶ **Determinar:**

- $A \cdot x' = b'$



Erros – Resíduo

■ Procedimento de Determinação do Erro

▶ Fazer:

- **Resíduo** = $b - b'$

$$\text{Resíduo} = b - b' = A \cdot x - A \cdot x' = A \cdot (x - x') = A \cdot \text{erro}$$



Erros – Resíduo

- **Verifica-se que:**

- ▶ O resíduo **não** é o erro, **apenas** uma estimativa do mesmo;
- ▶ Quanto **menor** for o resíduo, **menor** será o erro.



Erros – Resíduo

- **Exemplo 12:**

- ▶ **Refinar a solução do sistema:**

$$1,5x_1 + 5,4x_2 + 3,3x_3 = 10$$

$$4,2x_1 + 2,3x_2 + 4,5x_3 = 11,7$$

$$2,7x_1 + 5,7x_2 + 7,8x_3 = 8,9$$

- ▶ **Cuja solução encontrada através pelo método de Gauss, utilizando a solução retroativa é:**

$$\mathbf{x}^{(0)} = [3,1252 \quad 1,7121 \quad -1,1918]'$$



Erros – Resíduo

- **Exemplo 12:**

- ▶ **O resíduo calculado é:**

$$\mathbf{r}^{(0)} = \mathbf{b} - \mathbf{Ax}^{(0)} = \begin{bmatrix} -0.0002 \\ -0.0006 \\ -0.0010 \end{bmatrix}$$

- ▶ **Vê-se pelo resíduo que a precisão alcançada não foi satisfatória.**
- ▶ **O vetor $\mathbf{x}^{(0)}$ é chamado de **vetor solução**.**



Erros – Resíduo

- **Exemplo 12:**

- ▶ **Com o intuito de melhorar a solução, considera-se um novo vetor $x^{(1)}$ chamado de **vetor solução melhorado**.**



Erros – Resíduo

■ Exemplo 12:

- ▶ De forma que : $\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(0)} + \boldsymbol{\delta}^{(0)}$, onde $\boldsymbol{\delta}^{(0)}$ é o **vetor de correção**. Assim:

$$\mathbf{Ax}^{(1)} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}^{(0)} + \boldsymbol{\delta}^{(0)}) = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{Ax}^{(0)} + \mathbf{A}\boldsymbol{\delta}^{(0)} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\delta}^{(0)} = \mathbf{b} - \mathbf{Ax}^{(0)}$$

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\delta}^{(0)} = \mathbf{r}^{(0)}$$



Erros – Resíduo

- **Exemplo 12:**

- ▶ **Calcular o vetor de correção:**

$$\begin{bmatrix} 1,5 & 5,4 & 3,3 & \vdots & 10 \\ 4,2 & 2,3 & 4,5 & \vdots & 11,7 \\ 2,7 & 5,7 & 7,8 & \vdots & 8,9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,0002 \\ -0,0006 \\ -0,0010 \end{bmatrix}$$



Erros – Resíduo

- **Exemplo 12:**

- ▶ **A solução é:**

$$\delta^{(0)} = \begin{bmatrix} 0,0000 \\ 0,0001 \\ 0,0002 \end{bmatrix}$$



Erros – Resíduo

- **Exemplo 12:**

- ▶ **Desta forma, a solução melhorada será:**

$$\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(0)} + \delta^{(0)} = \begin{bmatrix} 3,1252 \\ 1,7122 \\ -1,1920 \end{bmatrix}$$



Erros – Resíduo

- **Exemplo 12:**

- ▶ **Cujo novo resíduo é:**

$$\mathbf{r}^{(1)} = \mathbf{b} - \mathbf{Ax}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0,0000 \\ 0,0000 \\ 0,0000 \end{bmatrix}$$



Erros – Resíduo

- **Exemplo 12:**

- ▶ **Em exemplos onde o resíduo ainda não seja satisfeito pode-se utilizar o mesmo procedimento:**

$$\mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{x}^{(1)} + \delta^{(1)}$$

- ▶ **Assim, o vetor correção $\delta^{(1)}$, será calculado por $\mathbf{A} \delta^{(1)} = \mathbf{r}^{(1)}$.**



Erros – Resíduo

- **Exemplo 12:**

- ▶ **Acha-se assim, sempre uma solução melhorada e com resíduo tendendo a zero.**



Sistemas Lineares - Bibliografia

- ▶ Ruggiero, M. A. Gomes & Lopes, V. L. da R. *Cálculo Numérico: Aspectos teóricos e computacionais*. MAKRON Books, 1996, 2ª ed.
- ▶ Asano, C. H. & Colli, E. *Cálculo Numérico: Fundamentos e Aplicações*. Departamento de Matemática Aplicada – IME/USP, 2007.
- ▶ Sanches, I. J. & Furlan, D. C. *Métodos Numéricos*. DI/UFPR, 2006.
- ▶ Paulino, C. D. & Soares, C. Erros e Propagação de Erros, *Notas de aula*, SE/ DM/ IST [Online] http://www.math.ist.utl.pt/stat/pe/qeb/semestr_e_1_2004-2005/PE_erros.pdf [Último acesso 07 de Junho de 2007].