Cálculo Numérico
Módulo III

Sistemas de Equações Lineares (SEL) – Parte II

Profs.: Bruno Correia da Nóbrega Queiroz
José Eustáquio Rangel de Queiroz
Marcelo Alves de Barros

Métodos Iterativos

- **Motivação I**
  - **Ocorrência em larga escala de sistemas lineares em cálculos de Engenharia e modelagem científica**
    - **Exemplos:**
      - **Simulações de processos químicos**
      - **Simulações de dispositivos e circuitos**
      - **Modelagem de processos geocientíficos e geoambientais**
      - **Análise estrutural**
      - **Biologia estrutural**
      - **Modelagem de processos físicos**

Métodos Iterativos

- **Motivação II**
  - **Tendência à existência de matrizes de coeficientes à grandes e esparsas**
    - **Grandes** ⇨ **Comum para** ***n > 100.000***
    - **Esparsas** ⇨ **Maioria dos coeficientes nulos**
  - **Resolução de sistemas esparsos por métodos diretos**
    - **Processos de triangularização e fatoração ⇨ Onerosos, por não preservarem a esparsidade original, que pode ser útil por facilitar a resolução do sistema.**

Métodos Iterativos

- **Motivação III**
  - **Métodos mais apropriados para a resolução de sistemas de natureza esparsa ⇨ Métodos iterativos**
    - **Gauss-Jacobi**
    - **Gauss-Seidel**

Métodos Iterativos

- **Sistemas Esparsos no MATLAB**
  - ***>>help issparse*** ⇨ **Teste de esparsidade**
  - ***>>help sparse*** ⇨ **Conversão de matriz cheia em matriz esparsa**
  - ***>>help full*** ⇨ **Conversão de matriz esparsa em matriz cheia**
  - **Geração de Matrizes Esparsas:**
    - ***>>help sprand*** ⇨ **Geração de matriz esparsa aleatória**
    - ***>>help sparndsym*** ⇨ **Geração de matriz esparsa simétrica aleatória**

Métodos Iterativos

- **Métodos para Sistemas Esparsos no MATLAB**
  - *>> help pcg* ⇨ **Gradiente Conjugado**
  - *>> help cgs* ⇨ **Gradiente Conjugado Quadrático (CGS)**
  - >>help bicg ⇨ **Gradiente BiConjugado (BiCG)**
  - >>help bicgstab ⇨ **Gradiente BiConjugado Estabilizdo (BiCGSTAB)**
  - *>>help gmres* ⇨ **Resíduo Mínimo Generalizado (GMRES)**
  - *>>help qmr* ⇨ **Resíduo Quase Mínimo (QMR)**

Métodos Iterativos

- A partir de uma estimativa inicial x_i^0, consistem em encontrar uma seqüência de estimativas x_i^k que convirja para uma solução do SEL após um número suficientemente grande de iterações.

$$\begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \\ \vdots \\ x_n^{(0)} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \\ \vdots \\ x_n^{(1)} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ x_3^{(2)} \\ \vdots \\ x_n^{(2)} \end{bmatrix} \Rightarrow \cdots \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{bmatrix}$$

Métodos Iterativos

- **Vantagem $\Rightarrow$ Menos suscetíveis ao acúmulo de erros de arredondamento do que o método de Eliminação de Gauss.**

- **Lembretes importantes:**
  - **Como todo processo iterativo, estes métodos sempre apresentarão um resultado aproximado, que será tão próximo do resultado real conforme o número de iterações realizadas.**
  - **Além disto, também é preciso ter cuidado com a convergência destes métodos.**

Sistemas de Equações Lineares

Métodos Iterativos

- Transformação do sistema linear $Ax=b$ em $x = Cx + g$
  - **A**: matriz dos coeficientes, **n x m**
  - **x**: vetor das variáveis, **n x 1**;
  - **b**: vetor dos termos constantes, **n x 1**;
  - **C**: matriz, **n x n**; e
  - **g**: vetor, **n x 1**.
- Métodos a estudar
  - *Gauss-Jacobi*
  - *Gauss-Seidel*

Método de Gauss-Jacobi

Método de Gauss-Jacobi

- Conhecida a estimativa inicial, $\mathbf{x}^{(0)}$, obtém-se consecutivamente os vetores:

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{C}\mathbf{x}^{(0)} + \mathbf{g}, \quad (\text{primeira aproximação})\\
&\mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{C}\mathbf{x}^{(1)} + \mathbf{g}, \quad (\text{segunda aproximação})\\
&\vdots\\
&\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{C}\mathbf{x}^{(k-1)} + \mathbf{g}, \quad (k\text{-ésima aproximação})
\end{aligned}
$$

- De um modo geral, a aproximação $\mathbf{x}^{(k+1)}$ é calculada pela fórmula:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{C}\,\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{g}, \quad k = 0, 1, \ldots$$

Método de Gauss-Jacobi

- **Método de Gauss-Jacobi**
  - **Da primeira equação do sistema:**

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_2 = b_1$$

obtém-se: $x_1 = (1/a_{11})\,(b_1 - a_{12} x_2 - \ldots - a_{1n} x_2)$

e, analogamente,

$$x_2 = (1/a_{22})\,(b_2 - a_{21} x_1 - \ldots - a_{2n} x_n)$$

$$\vdots$$

$$x_n = (1/a_{nn})\,(b_n - a_{n1} x_1 - \ldots - a_{nn-1} x_{n-1})$$

Método de Gauss-Jacobi

- **Método de Gauss-Jacobi**
  - **Desta forma, para $x = Cx + g$, obtém-se:**

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -a_{12}/a_{11} & -a_{13}/a_{11} & \cdots & -a_{1n}/a_{11} \\ -a_{21}/a_{22} & 0 & -a_{23}/a_{22} & \cdots & -a_{2n}/a_{22} \\ -a_{31}/a_{33} & -a_{32}/a_{33} & 0 & \cdots & -a_{3n}/a_{33} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ -a_{n1}/a_{nn} & -a_{n2}/a_{nn} & -a_{n3}/a_{nn} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad g = \begin{bmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ \frac{b_2}{a_{22}} \\ \frac{b_3}{a_{33}} \\ \vdots \\ \frac{b_n}{a_{nn}} \end{bmatrix}$$

Método de Gauss-Jacobi

- **Método de Gauss-Jacobi**
  - **Distância entre duas iterações**

$$d^{(k)} = \max \left| x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)} \right|$$

  - **Critério de Parada**

$$d_r^{(k)} = \frac{d^{(k)}}{\max \left| x_i^{(k)} \right|} < \varepsilon$$

Método de Gauss-Jacobi

- **Método de Gauss-Jacobi – Exemplo 13**
  - **Seja o sistema:**

$$\begin{aligned} 10x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 7 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 &= 8 \\ 2x_1 + 3x_2 + 10x_3 &= 6 \end{aligned}$$

  - **Determinação de C e g**

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -2/10 & -3/10 \\ -1/5 & 0 & -1/5 \\ -1/5 & -3/10 & 0 \end{bmatrix} \qquad g = \begin{bmatrix} \frac{7}{10} \\ \frac{8}{5} \\ \frac{6}{10} \end{bmatrix}$$

Método de Gauss-Jacobi

- **Método de Gauss-Jacobi – Exemplo 13**
  - **Assim, considerando como estimativa inicial:**

$$x_0 = \begin{bmatrix} 0,7 \\ -1,6 \\ 0,6 \end{bmatrix}$$

e $\varepsilon = 0,05$, obtém-se:

$$x^{(1)} = Cx^{(0)} + g = \begin{bmatrix} 0,84 \\ 1,34 \\ 0,94 \end{bmatrix}$$

e

$$|x_1^{(1)} - x_1^{(0)}| = 0,14$$

$$|x_2^{(1)} - x_2^{(0)}| = 2,94$$

$$|x_3^{(1)} - x_3^{(0)}| = 0,34$$

Método de Gauss-Jacobi

- **Método de Gauss-Jacobi – Exemplo 13**
  - **Assim:**

$$x^{(2)} = Cx^{(1)} + g = \begin{bmatrix} 0,150 \\ 1,244 \\ 0,030 \end{bmatrix} \Rightarrow d_r^{(2)} = \frac{0,91}{1,244} = 0,7315 > \varepsilon$$

e, analogamente:

$$x^{(3)} = Cx^{(2)} + g = \begin{bmatrix} 0,4422 \\ 1,5640 \\ 0,1968 \end{bmatrix} \Rightarrow d_r^{(3)} = \frac{0,32}{1,5640} = 0,2046 > \varepsilon$$

Método de Gauss-Jacobi

- **Método de Gauss-Jacobi – Exemplo 13**
  - **Igualmente:**

$$x^{(4)} = Cx^{(3)} + g = \begin{bmatrix} 0,3282 \\ 1,4722 \\ 0,0424 \end{bmatrix} \Rightarrow d_r^{(4)} = \frac{0,1544}{1,4722} = 0,1049 > \varepsilon$$

e, finalmente:

$$x^{(5)} = Cx^{(4)} + g = \begin{bmatrix} 0,3929 \\ 1,5259 \\ 0,0927 \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{d_r^{(5)} = \frac{0,0647}{1,5259} = 0,0424 < \varepsilon}$$

Método de Gauss-Seidel

Método de Gauss-Seidel

- **Similarmente ao método de Gauss-Jacobi, conhecida a estimativa inicial, $x^{(0)}$, obtém-se consecutivamente os vetores $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, ..., $x^{(k)}$**
- **Todavia, ao se calcular $x_j^{(k+1)}$, usa-se todos os valores $x_1^{(k+1)}$, $x_2^{(k+1)}$, ..., $x_{j-1}^{(k+1)}$ que já foram calculados e os valores $x_{j+1}^{(k)}$, $x_{j+2}^{(k)}$, ..., $x_n^{(k)}$ restantes.**

Método de Gauss-Seidel

Método de Gauss-Seidel

- **Descrição I**
  - **Seja o seguinte sistema de equações:**

$$
\begin{array}{l}
a_{11}.x_1 + a_{12}.x_2 + a_{13}.x_3 + \cdots + a_{1n-1}.x_{n-1} + a_{1n}.x_n = b_1 \\
a_{21}.x_1 + a_{22}.x_2 + a_{23}.x_3 + \cdots + a_{2n-1}.x_{n-1} + a_{2n}.x_n = b_2 \\
a_{31}.x_1 + a_{32}.x_2 + a_{33}.x_3 + \cdots + a_{3n-1}.x_{n-1} + a_{3n}.x_n = b_3 \\
\quad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \ddots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
a_{n1}.x_1 + a_{n2}.x_2 + a_{n3}.x_3 + \cdots + a_{nn-1}.x_{n-1} + a_{nn}.x_n = b_n
\end{array}
$$

Método de Gauss-Seidel

- **Descrição II**
  - Isolando x_i a partir da linha i, tem-se:

$$x_1 = \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}.x_2 - a_{13}.x_3 - \cdots - a_{1n-1}.x_{n-1} - a_{1n}.x_n\right)$$

$$x_2 = \frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}.x_1 - a_{23}.x_3 - \cdots - a_{2n-1}.x_{n-1} - a_{2n}.x_n\right)$$

$$x_3 = \frac{1}{a_{33}}\left(b_3 - a_{31}.x_2 - a_{32}.x_2 - \cdots - a_{3n-1}.x_{n-1} - a_{3n}.x_n\right)$$

$$\vdots$$

$$x_n = \frac{1}{a_{nn}}\left(b_n - a_{n1}.x_1 - a_{n2}.x_2 - \cdots - a_{nn-1}.x_{n-1}\right)$$

Método de Gauss-Seidel

Método de Gauss-Seidel

- **Descrição III**
  - **O processo iterativo se dá a partir das equações:**

$$x_1^{k+1} = \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}.x_2^{k} - a_{13}.x_3^{k} - \ldots - a_{1,n-1}.x_{n-1}^{k} - a_{1n}.x_n^{k}\right)$$

$$x_2^{k+1} = \frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}.x_1^{k+1} - a_{23}.x_3^{k} - \ldots - a_{2,n-1}.x_{n-1}^{k} - a_{2n}.x_n^{k}\right)$$

$$x_3^{k+1} = \frac{1}{a_{33}}\left(b_3 - a_{31}.x_1^{k+1} - a_{32}.x_2^{k+1} - \ldots - a_{3,n-1}.x_{n-1}^{k} - a_{3n}.x_n^{k}\right)$$

$$x_n^{k+1} = \frac{1}{a_{nn}}\left(b_n - a_{n1}.x_1^{k+1} - a_{n2}.x_2^{k+1} - \ldots - a_{n,n-1}.x_{n-1}^{k+1}\right)$$

Método de Gauss-Seidel

Método de Gauss-Seidel

- **Critério de Parada I**
  - **Diferença relativa entre duas iterações consecutivas, dada por:**

$$M_R^{k+1} = \begin{cases} \underset{1 \le i \le n}{\text{Máx.}} \left| \dfrac{x_i^{k+1} - x_i^k}{x_i^{k+1}} \right| & , \text{ se } x_i^{k+1} \neq 0 \\ 0 & , \text{ se } x_i^{k+1} = x_i^k = 0 \\ 1 & , \text{ se } \begin{cases} x_i^{k+1} = 0 \\ x_i^k \neq 0 \end{cases} \end{cases}$$

Método de Gauss-Seidel

Método de Gauss-Seidel

- **Critério de Parada II**
  - **Fim do processo iterativo ⇨ Valor de M_R^{k+1} suficientemente pequeno para a precisão desejada**

Método de Gauss-Seidel

- **Método de Gauss-Seidel – Exemplo 14**
  - **Resolver:**

$$5x + y + z = 5$$
$$3x + 4y + z = 6$$
$$3x + 3y + 6z = 0, \qquad \text{com} \qquad M_R^k \le 5.10^{-2}.$$

  - **Solução:**

$$x = \frac{1}{5}(5 - y - z)$$
$$y = \frac{1}{4}(6 - 3x - z)$$
$$z = \frac{1}{6}(-3x - 3y) \Rightarrow z = -\frac{1}{2}(x + y)$$

Método de Gauss-Seidel

- ## Método de Gauss-Seidel – Exemplo 14
  - **Quadro de resultados do processo iterativo**

x^k	M_x^k	y^k	M_y^k	z^k	M_z^k	M_R^k
-1	-	0	-	1	-	-
0,8	2,25	0,65	1	-0,725	2,379	2,379
1,015	0,212	0,92	0,293	-0,967	0,250	0,293
1,009	0,006	0,985	0,066	-0,997	0,030	0,066
1,002	0,007	0,998	0,0013	-1	0,003	0,0013

x = 1,002 y = 0,998 z = -1

Método de Gauss-Seidel

- **Método de Gauss-Seidel – Exemplo 14**
  - **Verificação (substituição no sistema)**

x = 1,002 y = 0,998 z = -1

$$5.(1,002) + 1.(0,998) + 1.(-1) = 5,008 \cong 5 \quad \text{OK}$$
$$3.(1,002) + 4.(0,998) + 1.(-1) = 5,998 \cong 6 \quad \text{OK}$$
$$3.(1,002) + 3.(0,998) + 6.(-1) = 0 \quad \text{OK}$$

Método de Gauss-Seidel

- **Critérios de Convergência**
  - **Processo iterativo ⇨ Convergência para a solução exata não garantida para qualquer sistema.**
  - **Necessidade de determinação de certas condições que devem ser satisfeitas por um SEL para a garantia da convergência do método.**
  - **Critérios de determinação das condições de convergência**
    - **Critério de Sassenfeld**
    - **Critério das Linhas**

Método de Gauss-Seidel

- ## Critério de Sassenfeld I
  - **Sejam as quantidades β_i dadas por:**

$$\beta_1 = \left|\frac{1}{a_{11}}\right| \cdot \sum_{j=2}^{n} |a_{1j}| \quad \text{e} \quad \beta_i = \left|\frac{1}{a_{ii}}\right| \cdot \left[\sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}| \cdot \beta_j + \sum_{j=i+1}^{n} |a_{ij}|\right]$$

para $i = 2, 3, \ldots, n$

n - ordem do sistema linear que se deseja resolver
a_{ij} - coeficientes das equações do sistema

Método de Gauss-Seidel

- ## Critério de Sassenfeld II
  - **Este critério garante que o método de Gauss-Seidel convergirá para um dado SEL se a quantidade M, definida por:**

$$\boxed{M = \max_{1 \le i \le n} \beta_i}$$

for menor que 1 ($M<1$).

Método de Gauss-Seidel

- ## Critério de Sassenfeld III
  - **Exemplo 15: Seja A a matriz dos coeficientes e b o vetor dos termos constantes, dados por:**

$$
\begin{array}{ccccc}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & b_1 \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & b_2 \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & b_3 \\
a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & b_4
\end{array}
\Rightarrow
$$

$$\beta_1 = \left|\frac{1}{a_{11}}\right| \cdot (a_{12} + a_{13} + a_{14})$$

$$\beta_2 = \left|\frac{1}{a_{22}}\right| \cdot (|a_{21}|\beta_1 + |a_{23}| + |a_{24}|)$$

$$\beta_3 = \left|\frac{1}{a_{33}}\right| \cdot (|a_{31}|\beta_1 + |a_{32}|\beta_2 + |a_{34}|)$$

$$\beta_4 = \left|\frac{1}{a_{44}}\right| \cdot (|a_{41}|\beta_1 + |a_{42}|\beta_2 + |a_{43}|\beta_3)$$

Método de Gauss-Seidel

- ## Critério de Sassenfeld IV

  - **Exemplo 15: Seja A a matriz dos coeficientes e b o vetor dos termos constantes, dados por:**

$$\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & b_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & b_4 \end{array}$$

$$\beta_1 = \left|\frac{1}{a_{11}}\right| \cdot \left(a_{12} + a_{13} + a_{14}\right)$$

$$\beta_2 = \left|\frac{1}{a_{22}}\right| \cdot \left(|a_{21}|\beta_1 + |a_{23}| + |a_{24}|\right)$$

$$\beta_3 = \left|\frac{1}{a_{33}}\right| \cdot \left(|a_{31}|\beta_1 + |a_{32}|\beta_2 + |a_{34}|\right)$$

$$\beta_4 = \left|\frac{1}{a_{44}}\right| \cdot \left(|a_{41}|\beta_1 + |a_{42}|\beta_2 + |a_{43}|\beta_3\right)$$

Mostrar que a solução do SEL a seguir convergirá pelo método de Gauss-Seidel.

Método de Gauss-Seidel

- **Critério de Sassenfeld V**
  - **Exemplo 15:**

$$\begin{aligned}
2{,}0\cdot x_1 &+ x_2 - 0{,}2\cdot x_3 + 0{,}2\cdot x_4 = 0{,}4\\
0{,}6\cdot x_1 &+ 3\cdot x_2 - 0{,}6\cdot x_3 - 0{,}3\cdot x_4 = -7{,}8\\
-0{,}1\cdot x_1 &- 0{,}2\cdot x_2 + x_3 + 0{,}2\cdot x_4 = 1{,}0\\
0{,}4\cdot x_1 &+ 1{,}2\cdot x_2 + 0{,}8\cdot x_3 + 4{,}0\cdot x_4 = -10{,}0
\end{aligned}$$

Método de Gauss-Seidel

- **Critério de Sassenfeld VI**
  - **Exemplo 15: Solução**

$$\begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\begin{array}{cccc} & & A & \\ \end{array}$$

$$\left|\begin{array}{cccc:c} 2.0 & 1.0 & -0.2 & 0.2 & 0.4 \\ 0.6 & 3.0 & -0.6 & -0.3 & -7.8 \\ -0.1 & -0.2 & 1.0 & 0.2 & 1.0 \\ 0.4 & 1.2 & 0.8 & 4.0 & -10.0 \end{array}\right|$$

A — b

$$\beta_1 = \frac{1}{2} \cdot (1 + 0{,}2 + 0{,}2) = 0{,}7$$

$$\beta_2 = \frac{1}{3} \cdot (0{,}6 \cdot 0{,}7 + 0{,}6 + 0{,}3) = 0{,}44$$

$$\beta_3 = \frac{1}{1} \cdot (0{,}1 \cdot 0{,}7 + 0{,}2 \cdot 0{,}44 + 0{,}2) = 0{,}358$$

$$\beta_4 = \frac{1}{4} \cdot (0{,}4 \cdot 0{,}7 + 1{,}2 \cdot 0{,}44 + 0{,}8 \cdot 0{,}358) = 0{,}2736$$

$$M = \max_{1 \le i \le n} \beta_i = 0{,}7$$

M < 1 $\Rightarrow$ Convergência da solução do sistema a partir do método de Gauss-Seidel

Método de Gauss-Seidel

- **Critério das Linhas**
  - **Segundo este critério, um determinado sistema irá convergir pelo método de Gauss-Seidel, se:**

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| < |a_{ii}|, \text{ para } i = 1, 2, 3, \ldots, n.$$

Método de Gauss-Seidel

- ## Critério das Linhas
  - **Exemplo 16: O SEL do Exemplo 14 satisfaz o *Critério das Linhas*, sendo a verificação quase imediata, se for observado que:**

$$|a_{11}| = 2 > |a_{12}| + |a_{13}| + |a_{14}| = 1 + 0{,}2 + 0{,}2 = 1{,}4$$

$$|a_{22}| = 3 > |a_{21}| + |a_{23}| + |a_{24}| = 0{,}6 + 0{,}6 + 0{,}3 = 1{,}5$$

$$|a_{33}| = 1 > |a_{31}| + |a_{32}| + |a_{34}| = 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}2 = 0{,}5$$

$$|a_{44}| = 4 > |a_{41}| + |a_{42}| + |a_{43}| = 0{,}4 + 1{,}2 + 0{,}8 = 2{,}4$$

$$\boxed{\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| < |a_{ii}| \text{ para } i = 1, 2, 3, 4.}$$

Considerações Finais

- Tanto o Critério de Sassenfeld quanto o Critério das Linhas são condições suficientes, porém não necessárias, para a convergência do método de Gauss-Seidel para um dado SEL
  - Um dado SEL pode não satisfazer estes critérios e ainda convergir
  - Um sistema pode não satisfazer o Critério das Linhas, porém sua convergência será garantida se satisfizer o Critério de Sassenfeld

Método de Gauss-Seidel

- **Critério das Linhas x Critério de Sassenfeld**
  - **Exemplo 17: Seja o seguinte SEL:**

$$\begin{aligned} 10 \cdot x_1 + \quad x_2 &= 23 \\ 6 \cdot x_1 \quad + 2 \cdot x_2 &= 18 \end{aligned}$$

  - **O Critério das Linhas não é satisfeito, visto que:**

$$|a_{22}| = 2 < |a_{21}| = 6$$

  - **Todavia, o Critério de Sassenfeld é satisfeito, uma vez que:**

$$\beta_1 = \left|\frac{1}{10}\right| \cdot 1 = 0{,}1 \qquad \text{e} \qquad \beta_2 = \left|\frac{1}{2}\right| \cdot (6 \cdot 0{,}1) = 0{,}3$$

Método de Gauss-Seidel

- **Critério das Linhas x Critério de Sassenfeld**
  - **Exemplo 17: Assim sendo, a convergência do SEL é garantida.**

Considerações Finais

- **Embora não altere a solução do SEL, a ordem de aparecimento das equações pode alterar sua convergência pelo método da Gauss-Seidel.**
  - **Exemplo 18: Seja o SEL:**

$$-4 \cdot x_1 + 10 \cdot x_2 = 19$$
$$5 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 = 15$$

  - **Observa-se que na ordem atual de aparecimento das equações, o SEL não satisfaz o Critério das Linhas (verificar!!!); logo, sua convergência não é garantida.**
  - **A inversão da ordem das duas equações do SEL fará com que o Critério das Linhas seja satisfeito e sua convergência pelo método de Gauss-Seidel garantida (verificar também!!!).**

Bibliografia

- Ruggiero, M. A. Gomes & Lopes, V. L. da R. *Cálculo Numérico: Aspectos teóricos e computacionais*. MAKRON Books, 1996, 2ª ed.
- Asano, C. H. & Colli, E. *Cálculo Numérico: Fundamentos e Aplicações*. Departamento de Matemática Aplicada – IME/USP, 2007.
- Sanches, I. J. & Furlan, D. C. *Métodos Numéricos*. DI/UFPR, 2006.
- Paulino, C. D. & Soares, C. Erros e Propagação de Erros, *Notas de aula*, SE/ DM/ IST [Online] *http://www.math.ist.utl.pt/stat/pe/qeb/semestre_1_2004-2005/PE_erros.pdf* [Último acesso 07 de Junho de 2007].