Cálculo Numérico

Resolução Numérica de Equações – Parte I

Profs.: Bruno Correia da N. Queiroz
José Eustáquio Rangel de Queiroz
Marcelo Alves de Barros

Cálculo Numérico – **Objetivos**

- **Estudar métodos numéricos para a resolução de equações não lineares (determinar a(s) raiz(es) de uma função *f(x)*, ou seja, encontrar o(s) valor(es) de *x* tal que *f(x) = 0*)**
  - **Fundamentar a necessidade de uso de métodos numéricos para a resolução de equações não lineares**
  - **Discutir o princípio básico que rege os métodos numéricos para a resolução de equações não lineares**
  - **Apresentar uma série de métodos destinados à resolução de equações não lineares**

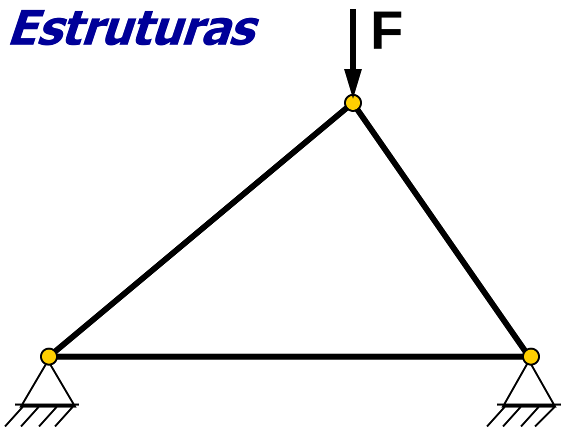
Cálculo Numérico – **Motivação I**

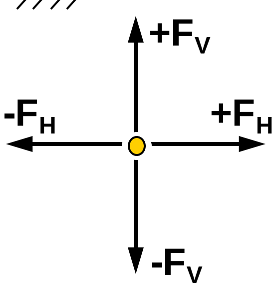
Necessidade de resolução de equações do tipo ***f(x) = 0***

Principio da Conservação

- **Momento**
- **Energia**
- **Massa**

Estruturas

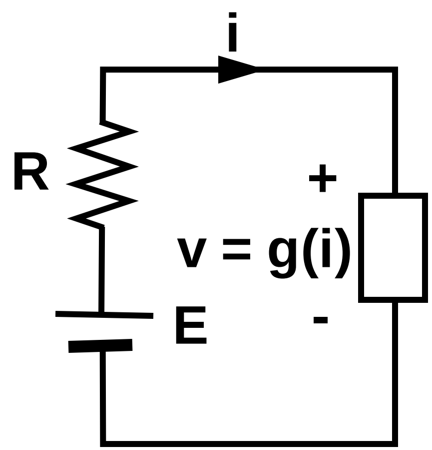




Em cada *nó*:

$$\sum F_H = 0$$
$$\sum F_V = 0$$

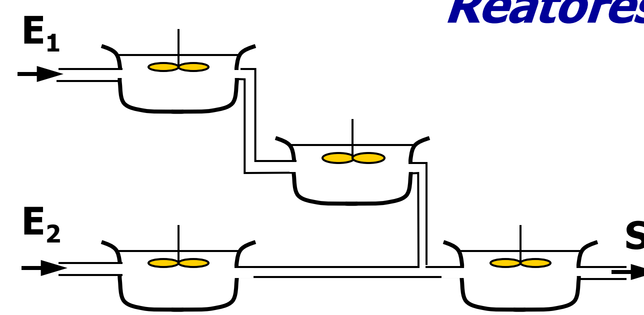
Circuitos

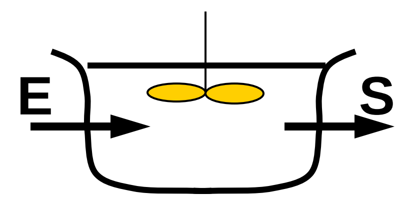


$$E - Ri - g(i) = 0$$

(***Lei de Kirchhoff***)

Reatores



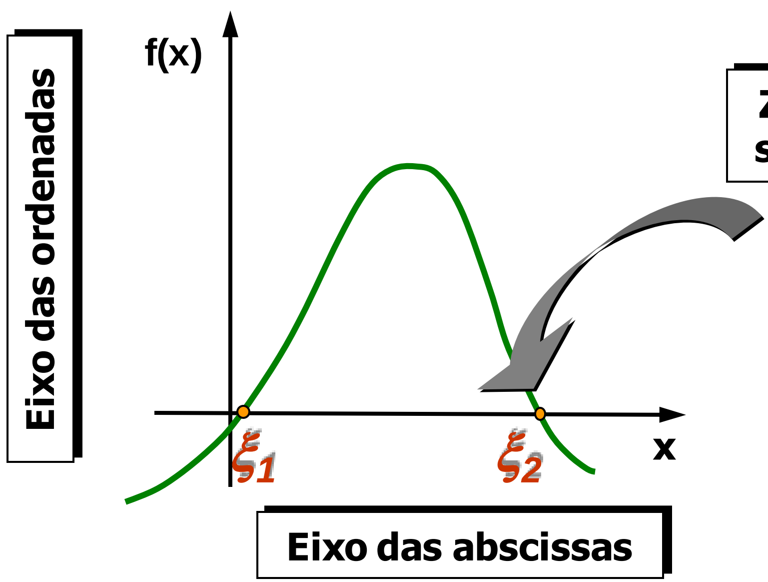


Em um dado intervalo:

$\sum$massa = entradas - saídas

Cálculo Numérico – **Motivação II**

- *$\xi \in \Re$* é um *zero* da função *f(x)* ou *raiz* da equação *$f(x) = 0$* se *$f(\xi) = 0$*.
- Zeros podem ser *reais* ou *complexos*.
- Este módulo trata de zeros *reais* de *f(x)*.



Cálculo Numérico – **Motivação III**

- **A partir de uma equação de 2º grau da forma**

$$ax^2 + bx + c = 0$$

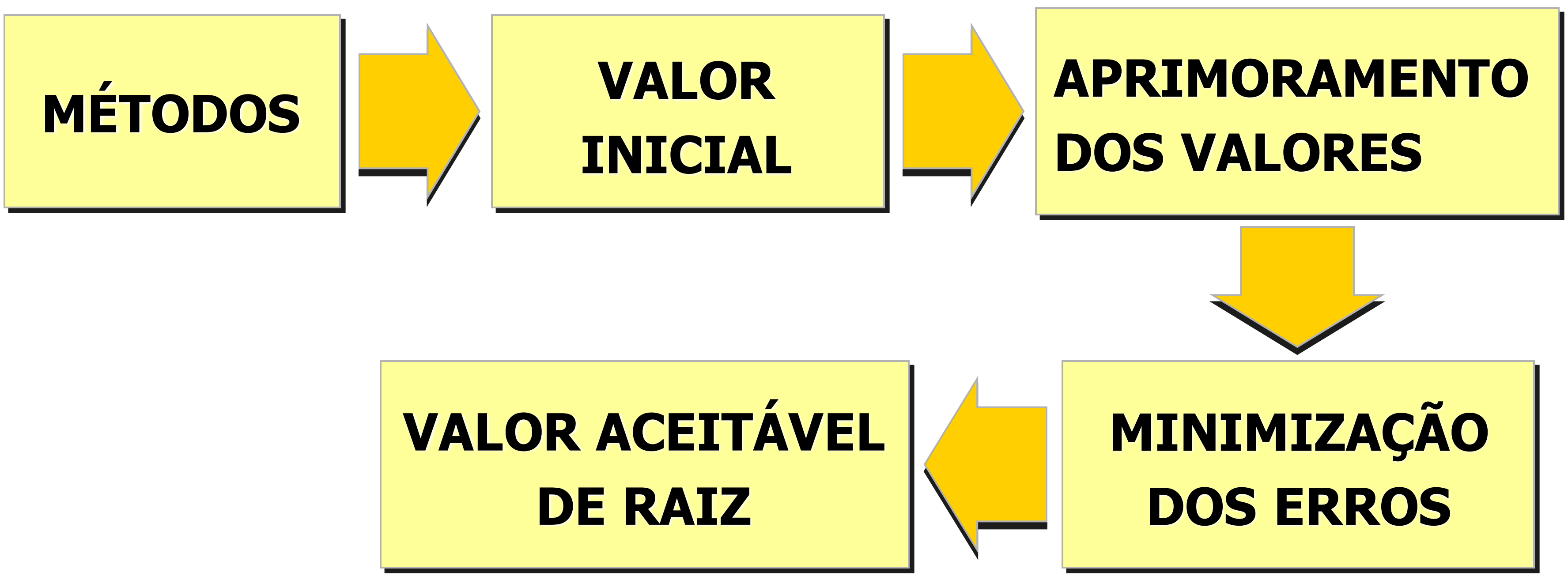
- **Determinação das raízes em função de *a*, *b* e *c***

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- **Polinômios de grau mais elevado e funções com maior grau de complexidade**
  - ***Impossibilidade* de determinação *exata* dos zeros**

Cálculo Numérico – **Motivação IV**

- **Princípio Básico dos Métodos Numéricos**



Cálculo Numérico – **Motivação V**

- **Etapas Usuais para a Determinação de Raízes a partir de Métodos Numéricos**

MÉTODOS

FASE I

Isolamento das raízes

Determinação de um intervalo (o menor possível) que contenha apenas uma raiz

FASE II

Refinamento das raízes

Melhoramento do valor da raiz aproximada (refinamento até a precisão desejada).

Cálculo Numérico – **Motivação VI**

- **FASE I: *ISOLAMENTO DAS RAÍZES***
  - **Realização de uma análise *teórica* e *gráfica* da função de interesse**
  - **Precisão das análises é relevante para o sucesso da fase posterior**

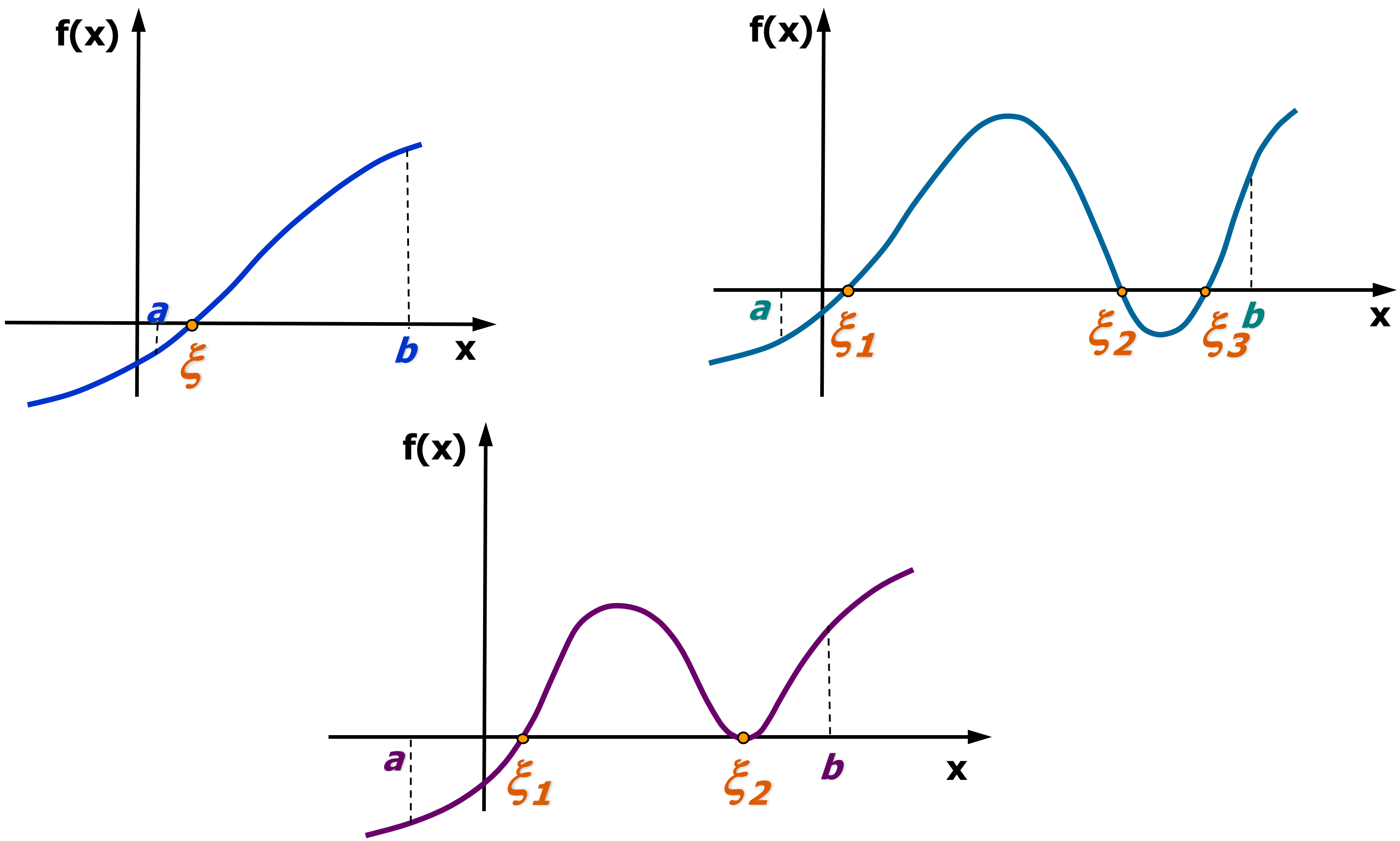
Cálculo Numérico – **Motivação VII**

- **TEOREMA 1:**

Sendo $f(x)$ contínua em um intervalo $[a, b]$, se $f(a)f(b) < 0$ então existe pelo menos um ponto $x = \xi$ entre a e b que é zero de $f(x)$.

Cálculo Numérico – **Motivação VIII**

- **ANÁLISE GRÁFICA:**



Cálculo Numérico – **Motivação IX**

Exemplo 01: $f(x) = x^3 - 9x + 3$

x	-∞	-100	-10	-5	-3	-1	0	1	2	3	4	5
f(x)	–	–	–	–	+	+	+	–	–	+	+	+

- *$f(x)$ é contínua para $\forall x \in R$.*
- $I_1 = [-5, -3]$
- $I_2 = [0, 1]$
- $I_3 = [2, 3]$

Cada um dos intervalos contém pelo menos um *zero*.

Cálculo Numérico – **Motivação X**

Exemplo 02: $f(x) = \sqrt{x} - 5e^{-x}$

x	0	1	2	3	...
f(x)	–	–	+	+	...

- *f(x) admite pelo menos um zero no intervalo [1, 2]*   *O zero é único?*

Análise do sinal de f'(x)

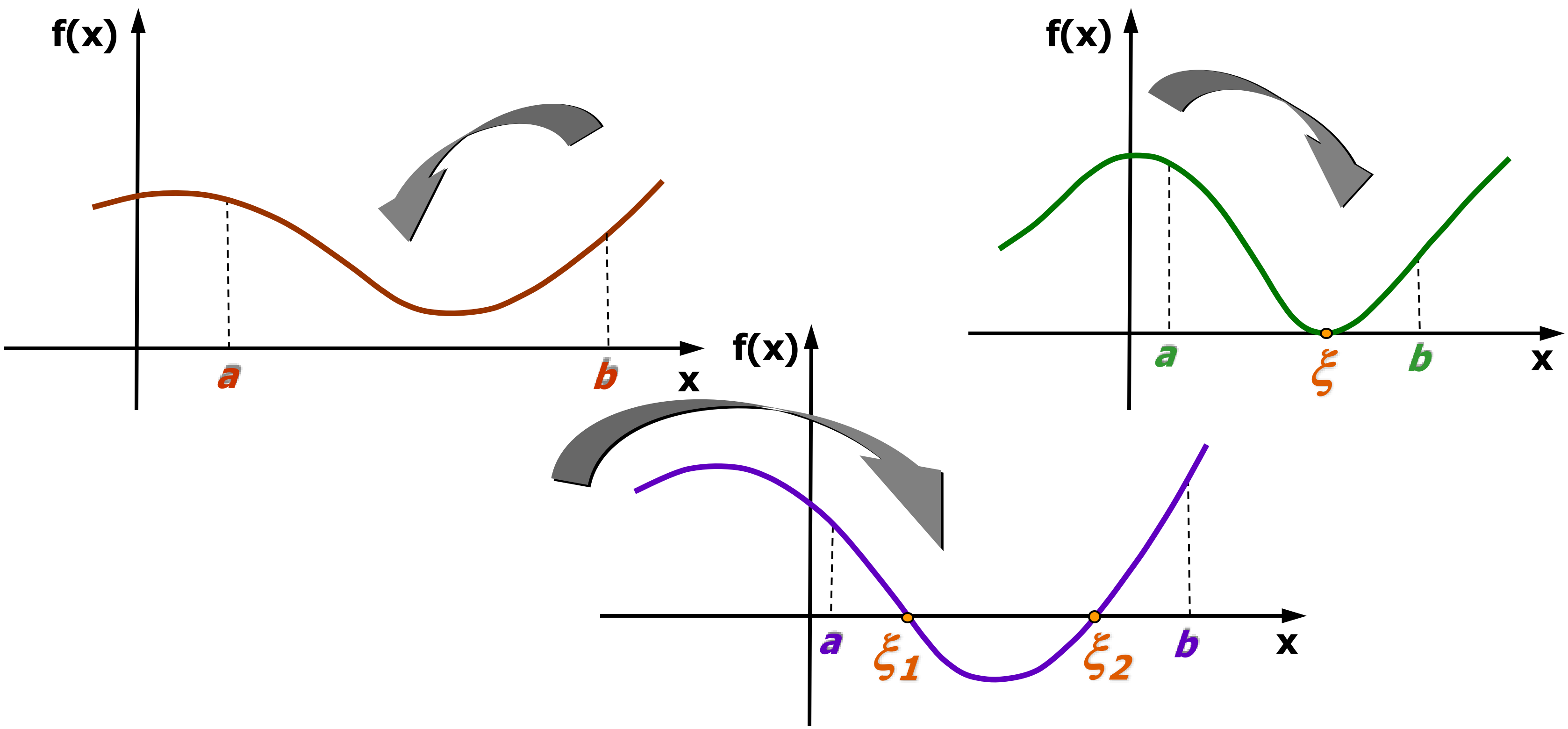
- $f'(x) = 1/(2\sqrt{x}) + 5e^{-x} > 0, \forall x > 0$

f(x) admite um *único zero* em todo seu domínio de definição, localizado no intervalo *[1, 2]*.

Cálculo Numérico – **Motivação XI**

- **OBSERVAÇÃO:**

Se *f(a)f(b) > 0*, então se pode ter diversas situações no intervalo *[a, b]*.



Cálculo Numérico – **Motivação XII**

ANÁLISE GRÁFICA

I

Construção do gráfico de $f(x)$

Localização das abscissas dos pontos nos quais a curva intercepta o eixo $\overrightarrow{ox}$

II

Obtenção da equação equivalente $g(x) = h(x)$ a partir da equação $f(x) = 0$

Construção dos gráficos de $g(x)$ e $h(x)$ no mesmo sistema cartesiano

III

Uso de programas para traçado de gráficos de funções

Localização dos pontos x nos quais $g(x)$ e $h(x)$ se interceptam ($f(\xi) = 0 \Leftrightarrow g(\xi) = h(\xi)$)

Cálculo Numérico – **Motivação XIII**

- **Estudo Detalhado do Comportamento de uma Função a partir de seu Gráfico**
  - *Domínio da função*
  - *Pontos de descontinuidade*
  - *Intervalos de crescimento e decrescimento*
  - *Pontos de máximo e mínimo*
  - *Concavidade*
  - *Pontos de inflexão*
  - *Assíntotas da função*

(Vide LEITHOLD, L. ***O Cálculo com Geometria Analítica*****)**

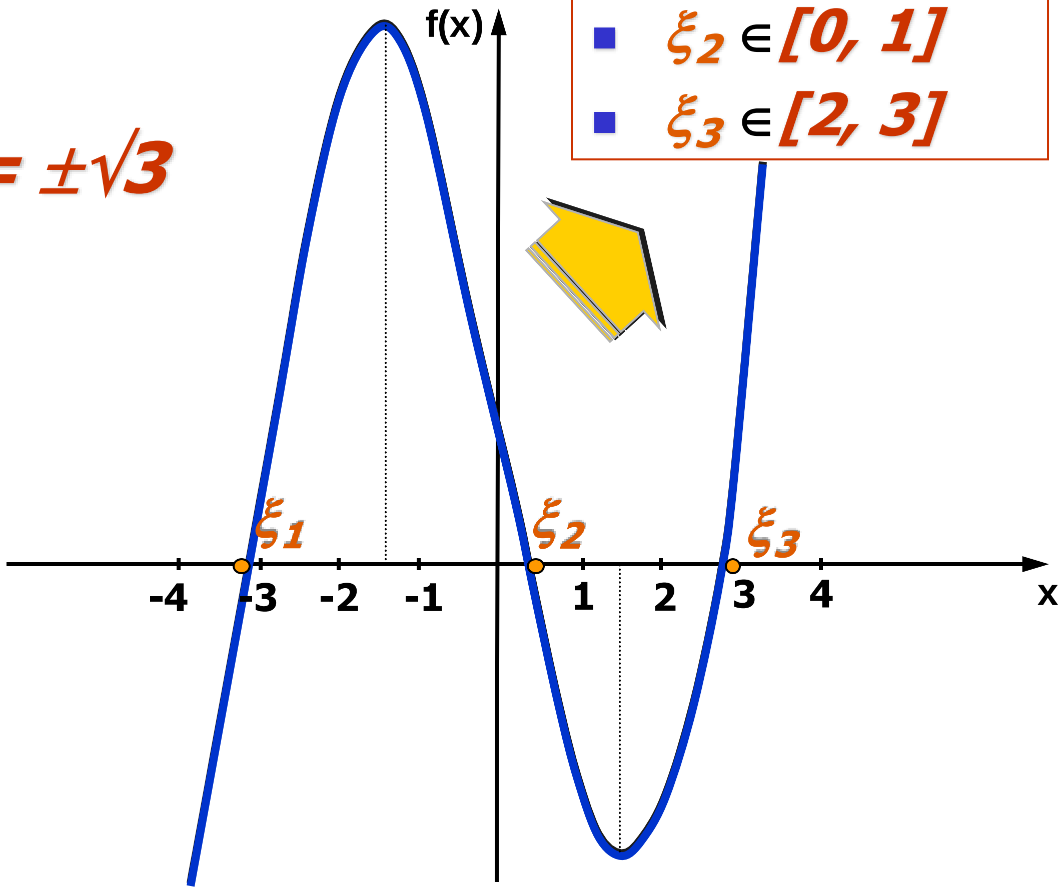
Cálculo Numérico – **Motivação XIV**

Exemplo 03: $f(x) = x^3 - 9x + 3$

(Uso do método *I*)

- $f'(x) = 3x^2 - 9$
- $f'(x) = 0 \iff x = \pm\sqrt{3}$

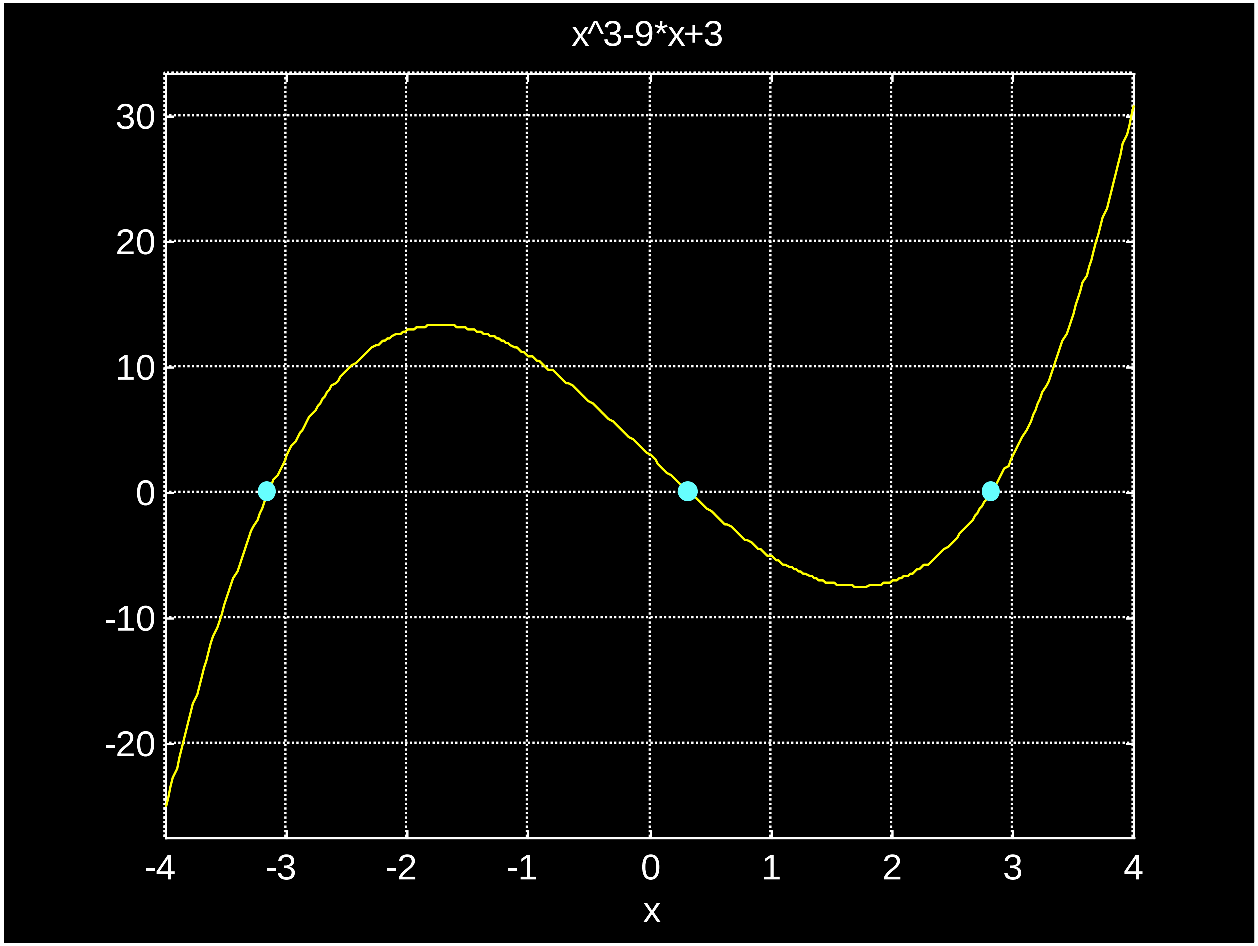
x	f(x)
-4	-25
-3	3
$-\sqrt{3}$	13,3923
-1	11
0	3
1	-5
$\sqrt{3}$	-7,3923
2	-7
3	3



- $\xi_1 \in [-4, -3]$
- $\xi_2 \in [0, 1]$
- $\xi_3 \in [2, 3]$

Cálculo Numérico – **Motivação XV**

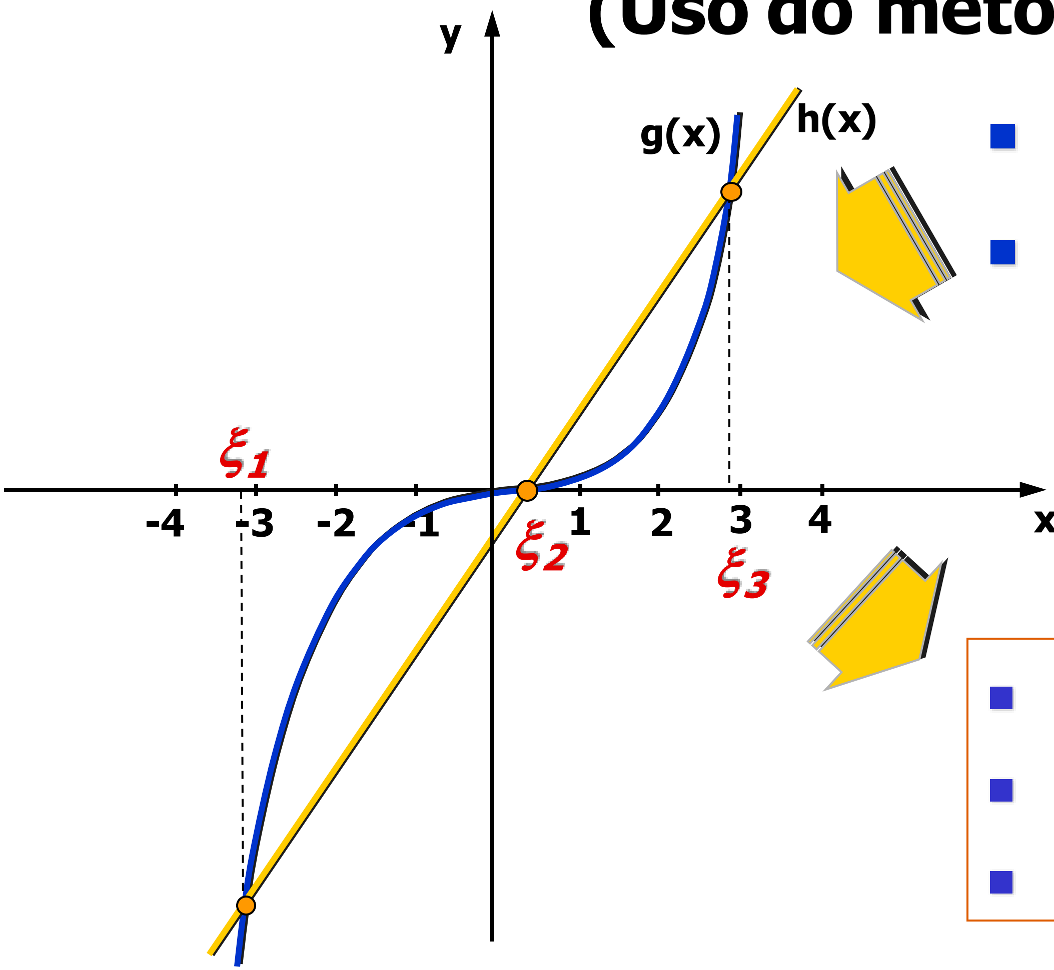
- **MATLAB:** *ezplot('x^3-9*x+3',[-4,4])*



Cálculo Numérico – **Motivação XVI**

Exemplo 03: $f(x) = x^3 - 9x + 3$

(Uso do método *II*)

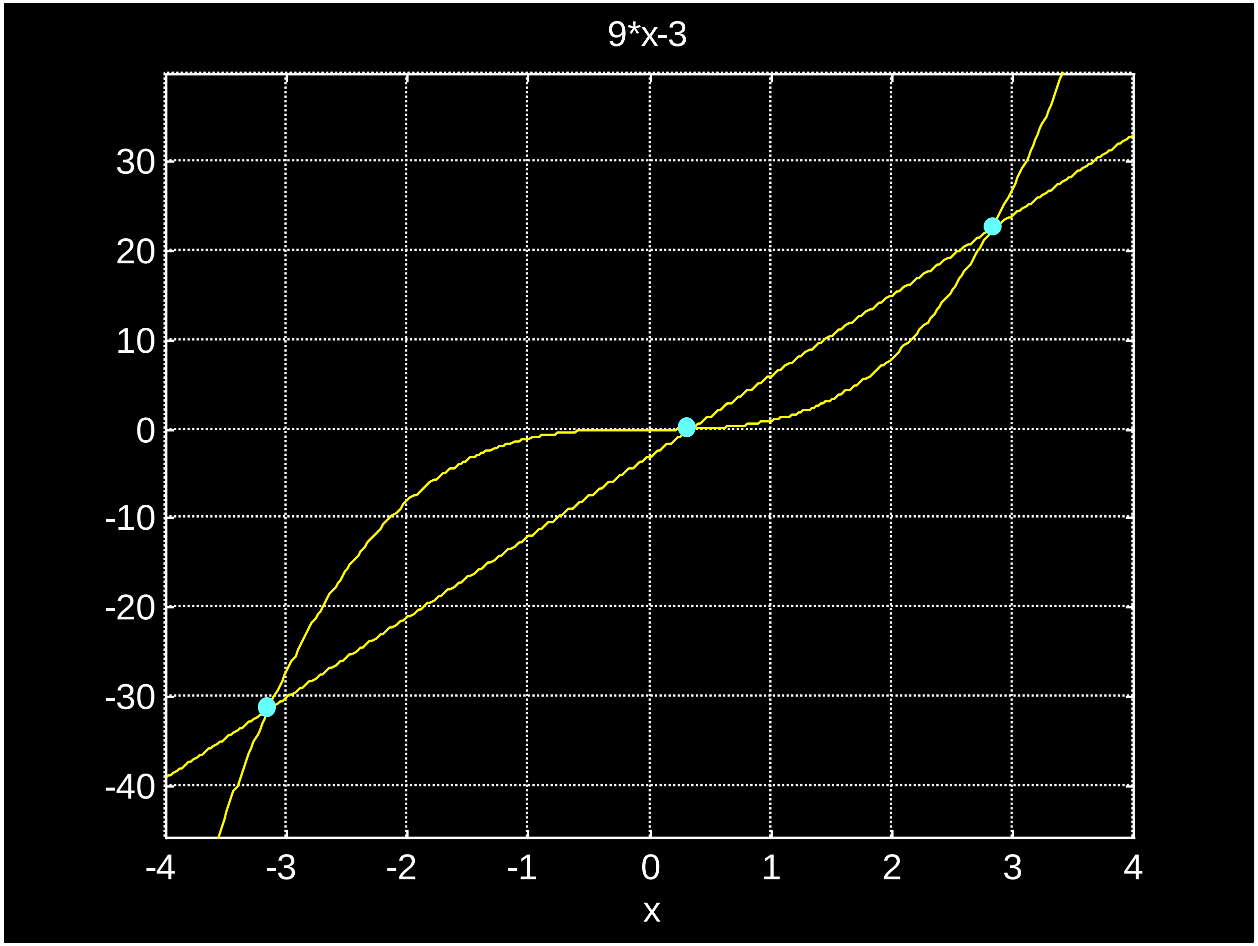


- $g(x) = x^3$
- $h(x) = 9x - 3$

- $\xi_1 \in (-4, -3)$
- $\xi_2 \in (0, 1)$
- $\xi_3 \in (2, 3)$

Cálculo Numérico – **Motivação XVII**

- **MATLAB:** ***ezplot('9*x-3',[-4,4])***



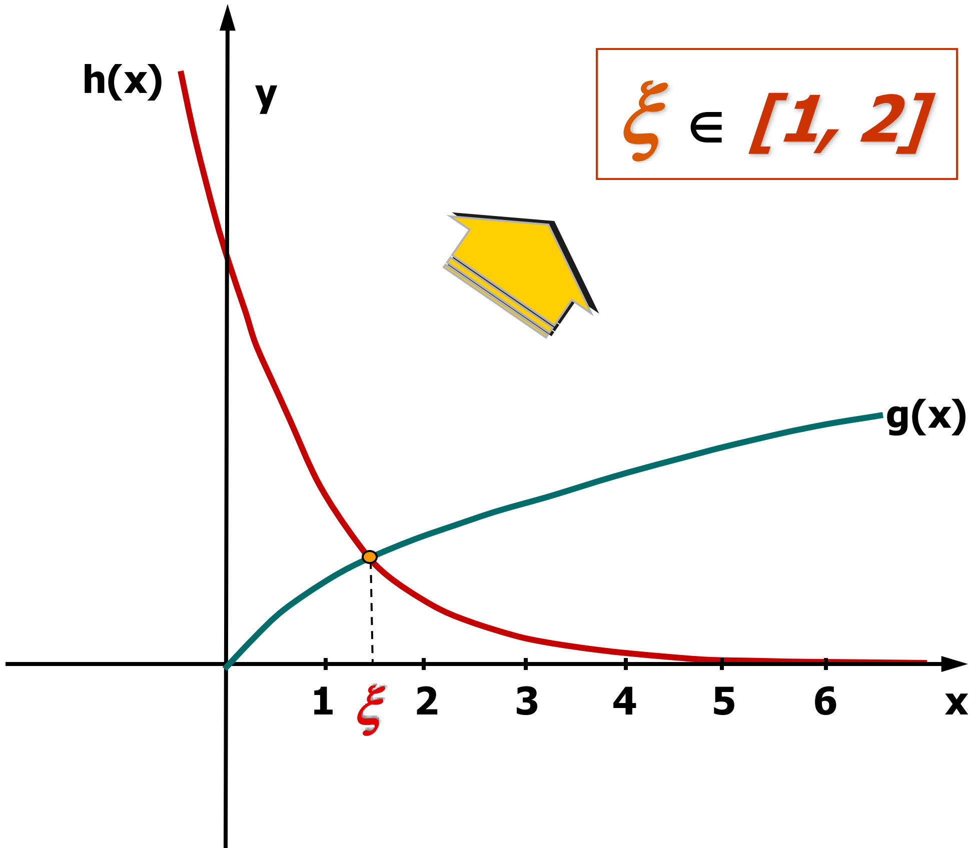
Cálculo Numérico – **Motivação XVIII**

Exemplo 04: $f(x) = \sqrt{x} - 5e^{-x}$

(Uso do Método *II*)

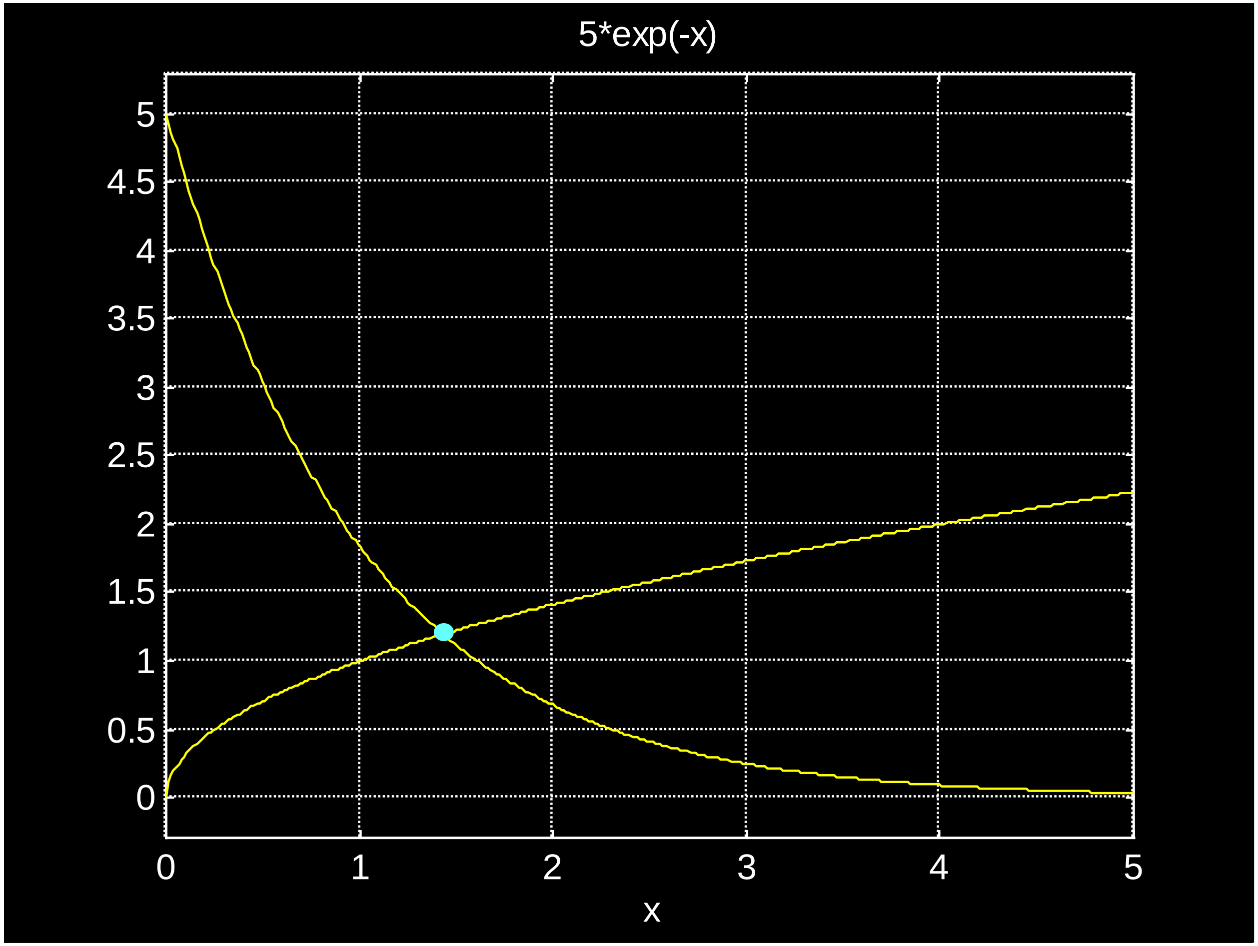
- $\sqrt{x} - 5e^{-x} = 0 \iff \sqrt{x} = 5e^{-x}$
- $g(x) = \sqrt{x}$
- $h(x) = 5e^{-x}$

$\xi \in [1, 2]$



Cálculo Numérico – **Motivação XIX**

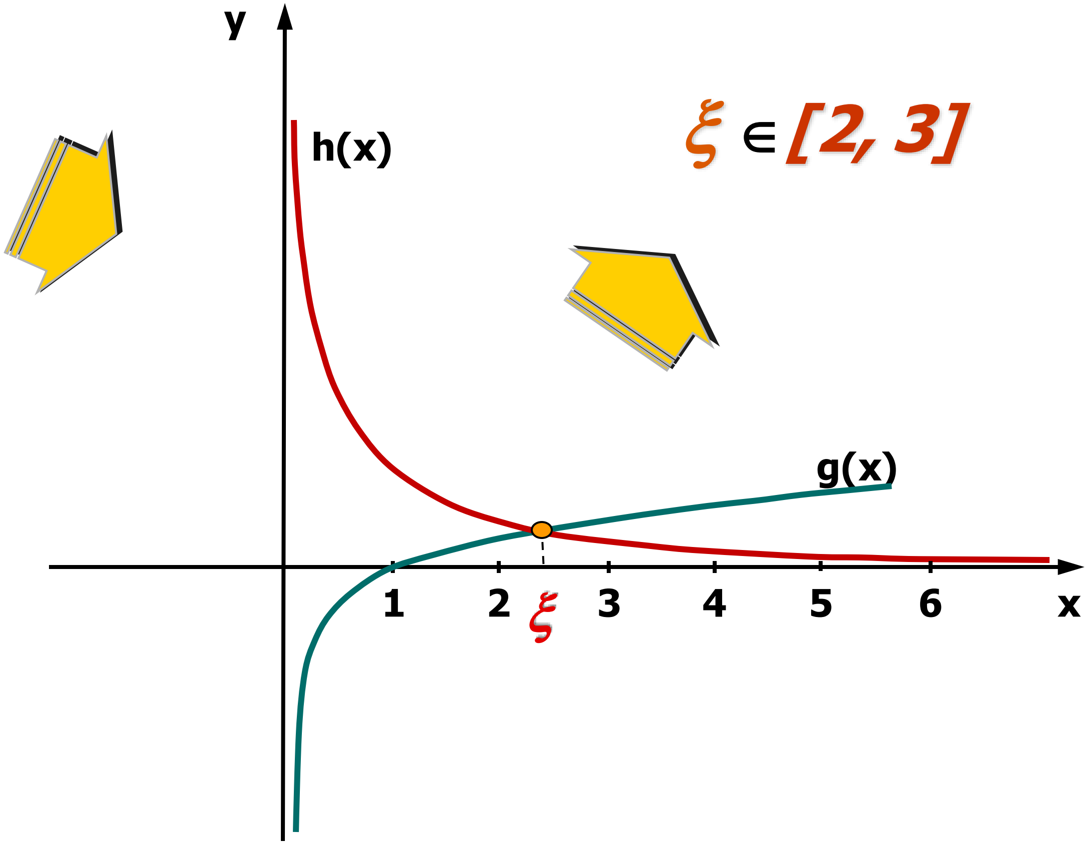
- **MATLAB:** *ezplot('5*exp(- x)',[0,5])*



Cálculo Numérico – **Motivação XX**

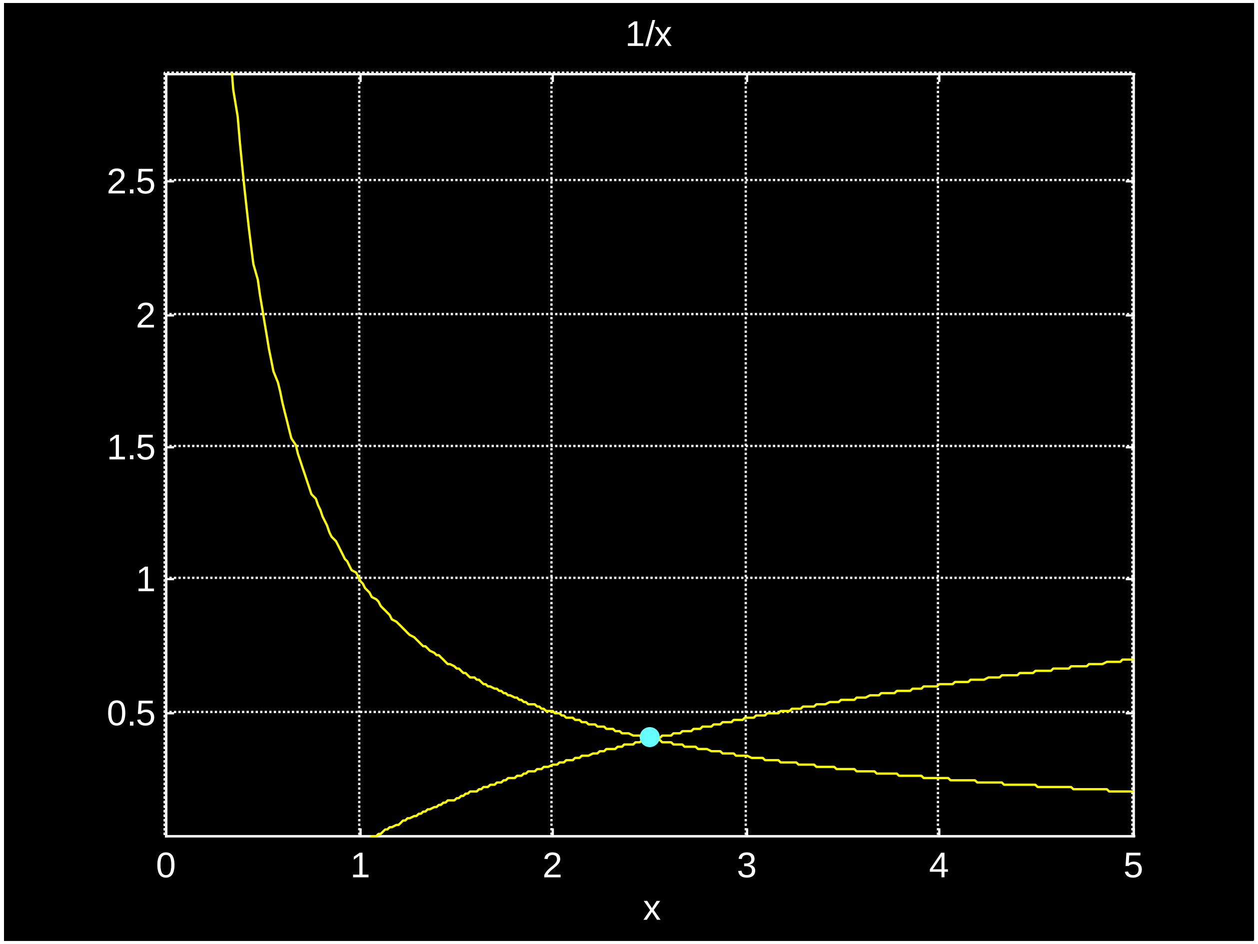
Exemplo 05: *$f(x) = x \log x - 1$*

- $x\log(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow \log(x) = 1/x$
- $g(x) = \log(x)$
- $h(x) = 1/x$



Cálculo Numérico – **Motivação XXI**

- **MATLAB:** ***ezplot('1/x',[0,5])***



Cálculo Numérico – **Motivação XXII**

- **FASE II: *REFINAMENTO***
  - **Aplicação de métodos numéricos destinados ao refinamento de raízes**
    - **Diferenciação dos métodos ⇨ Modo de refinamento**
    - **Método *Iterativo* ⇨ Caracterizado por uma série de instruções executáveis seqüencialmente, algumas das quais repetidas em ciclos (*iterações*)**

Cálculo Numérico – **Motivação XXIII**

CRITÉRIOS DE PARADA

- **Teste: x_k *suficientemente* próximo da raiz exata?**
- ***Como* verificar tal questionamento?**
- **Interpretações para *raiz aproximada***
  - **$\bar{x}$ é *raiz aproximada* com precisão ε se:**

i. $|\bar{x} - \xi| < \varepsilon$

ou

ii. $|f(\bar{x})| < \varepsilon$

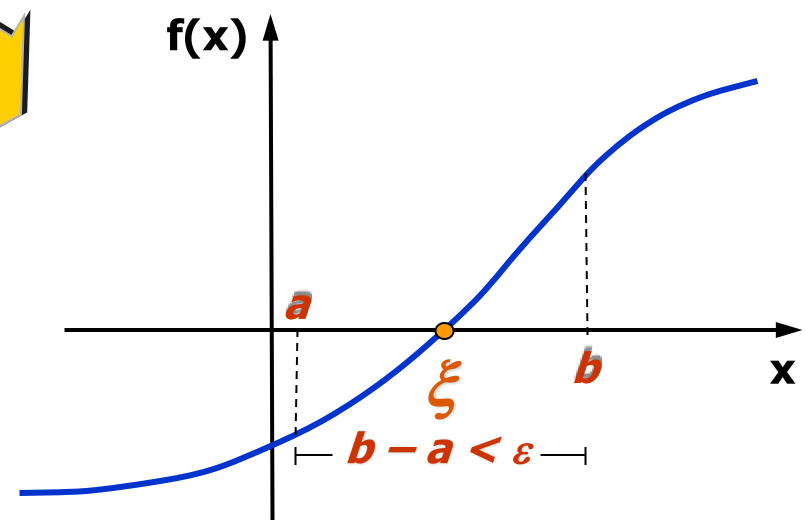
***Como* proceder se não se conhece ξ?**

Cálculo Numérico – **Motivação XXIV**

- **Redução do intervalo que contém a raiz a cada iteração**
  - **Obtenção de um intervalo *[a,b]* tal que:**
    - $\xi \in [a,b]$

      e
    - $b - a < \varepsilon$

$|x - \xi| < \varepsilon, \ \forall x \in [a,b]$



$\forall x \in [a,b]$ **pode ser tomado como** $\bar{x}$

Cálculo Numérico – **Motivação XXV**

$|\bar{x} - \xi| < \varepsilon$

$|f(\bar{x})| < \varepsilon$

Nem sempre é possível satisfazer *ambos* os critérios

Métodos numéricos são desenvolvidos de modo a satisfazer *pelo menos* um dos critérios

Cálculo Numérico – **Motivação XXVI**

PROGRAMAS COMPUTACIONAIS

Teste de Parada

Estipulação do *número máximo de iterações*

Prevenção contra *loopings*

- ***erros do programa***
- ***inadequação do método ao problema***