Cálculo Numérico

Resolução Numérica de Equações Parte II

Profs.: Bruno Correia da Nóbrega Queiroz
José Eustáquio Rangel de Queiroz
Marcelo Alves de Barros

Cálculo Numérico – **Bissecção**

- **Métodos Iterativos para a Obtenção de Zeros Reais de Funções**
  - ***Bissecção***
  - ***Falsa Posição***
  - ***Falsa Posição Modificado***
  - ***Ponto Fixo***
  - ***Newton-Raphson***
  - ***Secante***

Cálculo Numérico – **Bissecção**

- **Método da *Bissecção***

Dada uma função f(x) contínua no intervalo [a,b] onde existe uma raiz única, é possível determinar tal raiz subdividindo sucessivas vezes o intervalo que a contém pelo ponto médio de a e b.

Cálculo Numérico – **Bissecção**

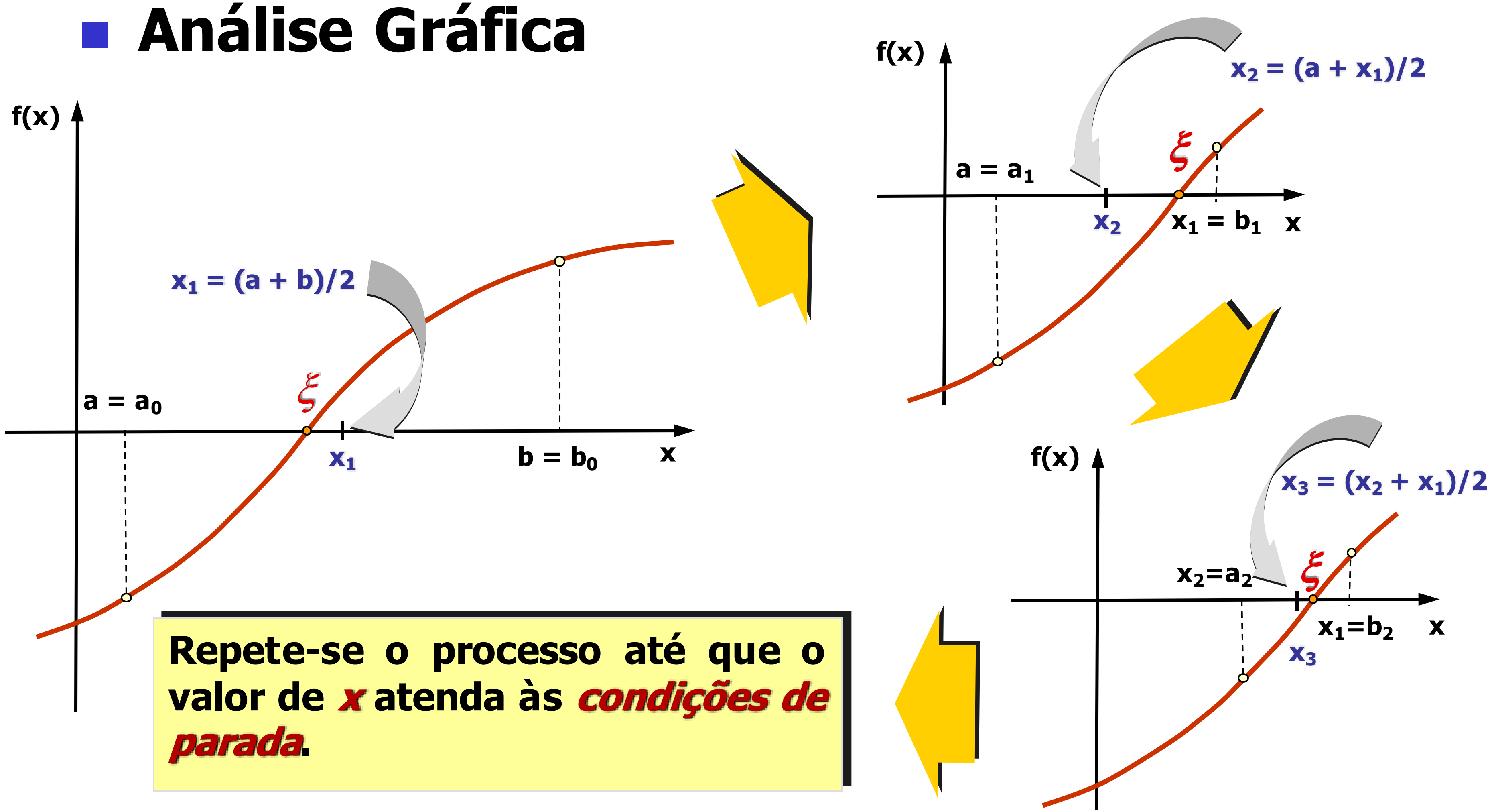
- **Definição do Intervalo Inicial**
  - **Atribuí-se *[a,b]* como *intervalo inicial***
    - $a_0 = a$
    - $b_0 = b$
  - **Condições de Aplicação**
    - $f(a)*f(b) < 0$
    - **Sinal da derivada *constante***

Cálculo Numérico – **Bissecção**

- **Definição de Novos Intervalos**
  - **Determina-se qual o subintervalo – *[a , x_1]* ou *[x_1 , b]* – que contém a *raiz***
    - **Calcula-se o produto *$f(a)*f(x_1)$***
    - **Verifica-se se *$f(a)*f(x_1) < 0$***
      - **Se *verdadeiro* ⇨ $\xi \in (a, x_1)$**
        (Logo a = *a* e b = *x_1*)
      - ***Caso contrario* ⇨ $\xi \in (x_1, b)$**
        (Logo a = *x_1* e b = *b*)
  - **Repete-se o processo até que o valor de *x* atenda às *condições de parada*.**

Cálculo Numérico – **Bisseção**

- **Análise Gráfica**



Repete-se o processo até que o valor de *x* atenda às *condições de parada*.

Cálculo Numérico – **Bissecção**

- **Generalização**
  - **Após *n* iterações, a raiz estará contida no intervalo:**

$$[b_n - a_n] = \left(\frac{b_0 - a_0}{2^n}\right)$$

de modo que ξ é tal que:

$$|\xi - x_{n+1}| < \left(\frac{b_0 - a_0}{2^{n+1}}\right)$$

Cálculo Numérico – **Bissecção**

- ***Tolerância*** **(** ε **)**
  - **Aproximação de zero, dependente do equipamento utilizado e da precisão necessária para a solução do problema**

A *tolerância* é uma estimativa para o *erro absoluto* desta aproximação.

Cálculo Numérico – **Bissecção**

- ***Tolerância*** **(*ε*)**
  - **Considerando** $\left|\xi - x_{n+1}\right| < \left(\dfrac{b_0 - a_0}{2^{n+1}}\right)$ **:**

deve-se escolher *n* tal que:

$$\left(\frac{b_0 - a_0}{2^{n+1}}\right) < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad n \geq \frac{\ln\left(\dfrac{b_0 - a_0}{\varepsilon}\right)}{\ln(2)} - 1$$

Cálculo Numérico – **Bissecção**

- **Condições de Parada**
  - **Se os valores fossem *exatos***
    - $f(x) = 0$
    - $(x_k - x_{k+1})/x_k = 0$
  - **Uma vez que são *aproximados***
    - $|f(x)| \leq$ *tolerância*
    - $|(x_k - x_{k+1})/x_k| \leq$ *tolerância*

Cálculo Numérico – **Bissecção**

Algoritmo

$k := 0$; $a_0 := a$; $b_0 := b$; $x_0 := a$;
$x_{k+1} := (a_k + b_k)/2$;
while ***critério de parada não satisfeito*** ***and*** $k \leq L$
    if $f(a_k)f(x_{k+1}) < 0$ ***then*** ***/* raiz em*** $[a_k , x_{k+1}]$ ****/***
        $a_{k+1} := a_k$; $b_{k+1} := x_{k+1}$;
    else ***/* raiz em*** $[x_{k+1}, b_k]$ ****/***
        $a_{k+1} := x_{k+1}$; $b_{k+1} := b_k$;
    endif
    $k := k + 1$; $x_{k+1} := (a_k + b_k)/2$;
endwhile
if $k > L$
    parada falhou
endif

Cálculo Numérico – **Bissecção**

Vantagens:

- **Facilidade de implementação;**
- **Estabilidade e convergência para a solução procurada;**
- **Desempenho regular e previsível.**

O número de interações é *dependente* da *tolerância* considerada

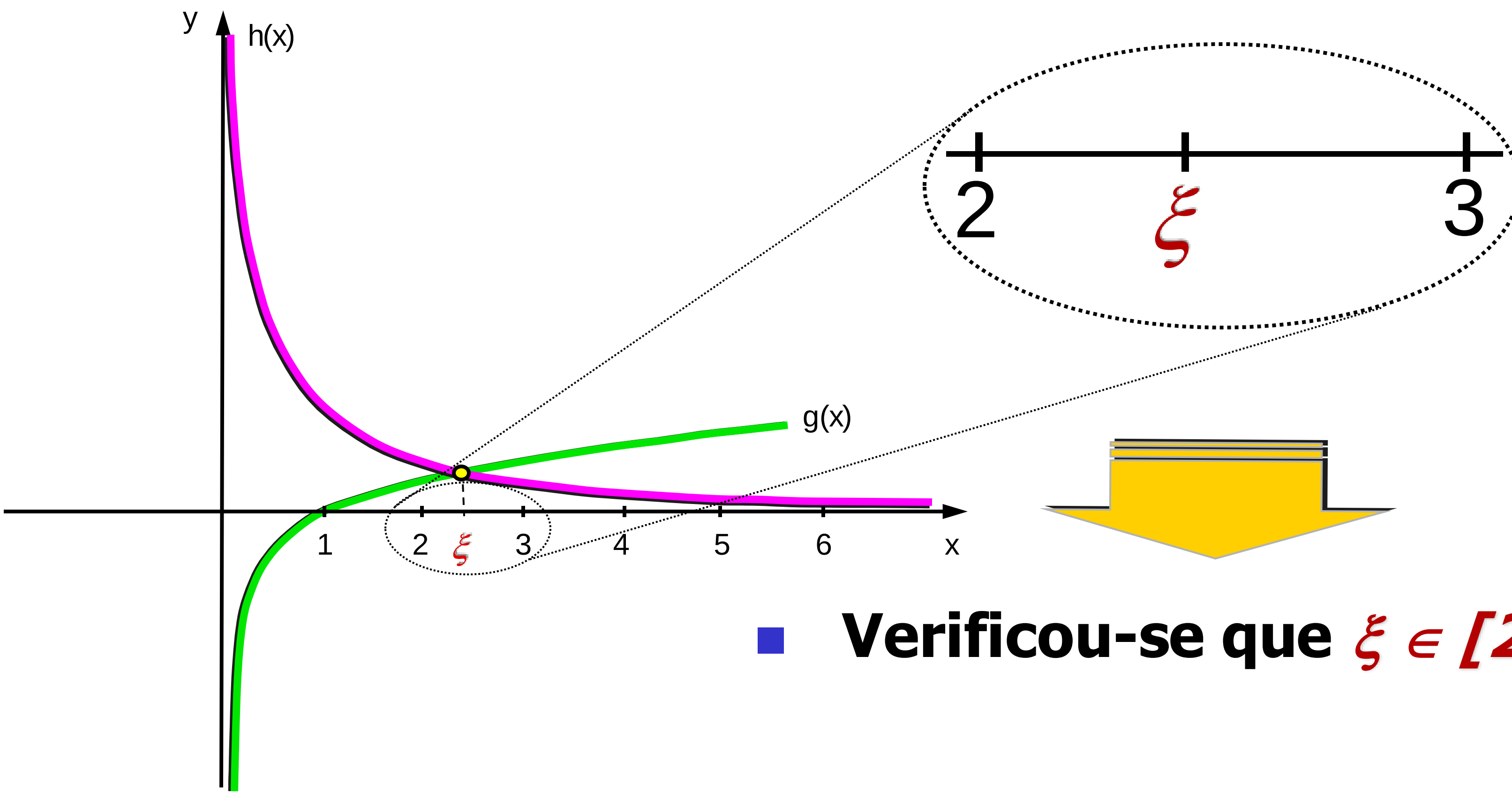
Cálculo Numérico – **Bissecção**

Desvantagens:

- **Lentidão do processo de convergência (requer o cálculo de *f(x)* em um elevado número de iterações);**
- **Necessidade de conhecimento prévio da região na qual se encontra a raiz de interesse (o que nem sempre é possível);**
- **Complexidade da extensão do método para problemas multivariáveis.**

Cálculo Numérico – **Bisseção**

Exemplo 06: Resgatando o Exemplo 05, ***$f(x) = x\log x - 1$***



- **Verificou-se que *$\xi \in [2, 3]$***

Cálculo Numérico – **Bissecção**

Exemplo 06: ***f(x) = xlogx - 1***

Considerando o *método da bissecção com tol = 0,002* e adotando *[a_0 ,b_0] = [2, 3]* como *intervalo inicial*, tem-se:

- **Cálculo da 1ª aproximação**
  - $x_1 = (a_0 + b_0)/2 = (2{,}00000 + 3{,}00000)/2 \Rightarrow$
    $x_1 = 2{,}50000$
  - $f(x_1) = f(2{,}50000) = -0{,}00510$
  - $f(a_0) = f(2{,}00000) = -0{,}39794$
  - **Teste de Parada**
    - $|f(x_1)| = |-0{,}00510| = 0{,}00510 > 0{,}002$

Cálculo Numérico – **Bissecção**

Exemplo 06: ***$f(x) = x\log x - 1$***

- **Cálculo da 2ª aproximação**
  - **Novo Intervalo**
    - $f(a_0).f(x_1) = (-0{,}39794).(-0{,}00510) > 0$

      logo: $a_1 = x_1 = 2{,}50000$ e $b_1 = b_0 = 3{,}00000$
  - $x_2 = (2{,}50000 + 3{,}00000)/2 =$

    $x_2 = 2{,}75000$
    - $f(2{,}50000) = -0{,}05100 < 0$
    - $f(3{,}00000) = 0{,}43140 > 0$
    - $f(2{,}75000) = 0{,}20820 > 0$
    - $\xi \in [2{,}5 ; 2{,}75]$

      $a_2 = a_1 = 2{,}50000$ e $b_2 = x_2 = 2{,}75000$

Cálculo Numérico – **Bissecção**

Exemplo 06:

- $x_3 = (2{,}50000 + 2{,}75000)/2 = 2{,}62500$
  - $f(2{,}50000) = -0{,}05100 < 0$
  - $f(2{,}75000) = 0{,}20820 > 0$
  - $f(2{,}62500) = 0{,}10020 > 0$
  - $\xi \in [2{,}5\ ,\ 2{,}625]$

    $a_3 = a_2 = 2{,}50000$

    $b_3 = x_3 = 2{,}62500$

- $x_4 = (2{,}50000 + 2{,}62500)/2 = 2{,}56250$
  - $f(2{,}50000) = -0{,}05100 < 0$
  - $f(2{,}62500) = 0{,}10020 > 0$
  - $f(2{,}56250) = 0{,}04720 > 0$
  - $\xi \in [2{,}5\ ,\ 2{,}5625]$

    $a_3 = a_2 = 2{,}50000$

    $b_3 = x_4 = 2{,}56250$

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

Cálculo Numérico – **Bissecção**

Exemplo 06: ***$f(x) = x\log x - 1$***

k	a_k	b_k	$f(a_k)$	$f(b_k)$	x_{k+1}	$f(x_{k+1})$
0	2,50000	3,00000	-0,39794	0,43136	2,50000	-0,00510
1	2,50000	3,00000	-0,00515	0,43136	2,75000	0,20820
2	2,50000	2,75000	-0,00515	0,20816	2,62500	0,10021
3	2,50000	2,62500	-0,00515	0,10021	2,56250	0,04720
4	2,50000	2,56250	-0,00515	0,04720	2,53125	0,02090
5	2,50000	2,53125	-0,00515	0,02094	2,51563	0,00790
6	2,50000	2,51563	-0,00515	0,00787	*2,50781*	*0,00140*

$\varepsilon = 0{,}002$

Cálculo Numérico – **Bisseção**

Exemplo 07: Seja $f(x) = x^3 - x - 1$

Intervalo inicial atribuído: [1, 2]

Considerando-se ε **= 0,002**

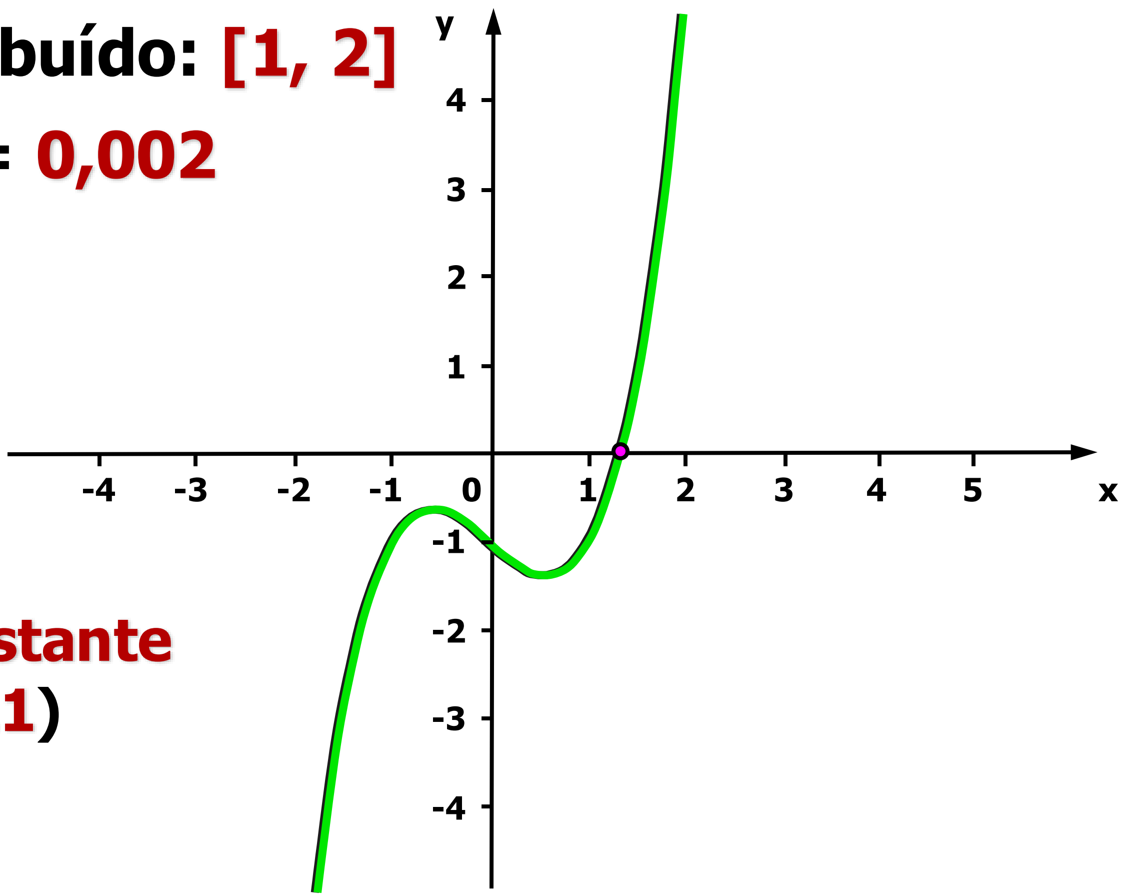
$f(a_0) = -1$

$f(b_0) = 5$

$f'(x) = 3x^2 - 1$

$f(a_0) * f(b_0) = -5 < 0$

Sinal da derivada constante
$(f'(a_0) = 2$ **e** $f'(b_0) = 11)$



Cálculo Numérico – **Bissecção**

Exemplo 07: ***$f(x) = x^3 - x - 1$***

- **Cálculo da 1ª aproximação**
  - $x_1 = (a_0+b_0)/2 = (1{,}000000+2{,}000000)/2 =$
    $x_1 = 1{,}500000$
  - $f(x_1) = 1{,}5^3 - 1{,}5 - 1 = 0{,}875000$
  - **Teste de Parada**
    - $|f(x_1)| = |0{,}875| = 0{,}875000 > 0{,}002$
  - **Escolha do Novo Intervalo**
    - $f(a_0).f(x_1) = (-1).0{,}875 = -0{,}875$

      logo: $a_1=a_0=1{,}000000$ e $b_1=x_1= 1{,}50000$

⋮

Cálculo Numérico – **Bissecção**

Exemplo 07: $f(x) = x^3 - x - 1$

k	a_k	b_k	$f(a_k)$	$f(b_k)$	x_{k+1}	$f(x_{k+1})$
0	1,0000000	2,0000000	-1,000000	5,000000	1,50000000	0,875000
1	1,0000000	1,5000000	-1,000000	0,875000	1,25000000	-0,296875
2	1,2500000	1,5000000	-0,296875	0,875000	1,37500000	0,224609
3	1,2500000	1,3750000	-0,296875	0,224609	1,31250000	-0,051514
4	1,3125000	1,3750000	-0,051514	0,224609	1,34375000	0,082611
5	1,3125000	1,3437500	-0,051514	0,082611	1,32812500	0,014576
6	1,3125000	1,3281250	-0,051514	0,014576	1,32031250	-0,018711
7	1,3203125	1,3281250	-0,018700	0,014576	*1,32421875*	*-0,002128*

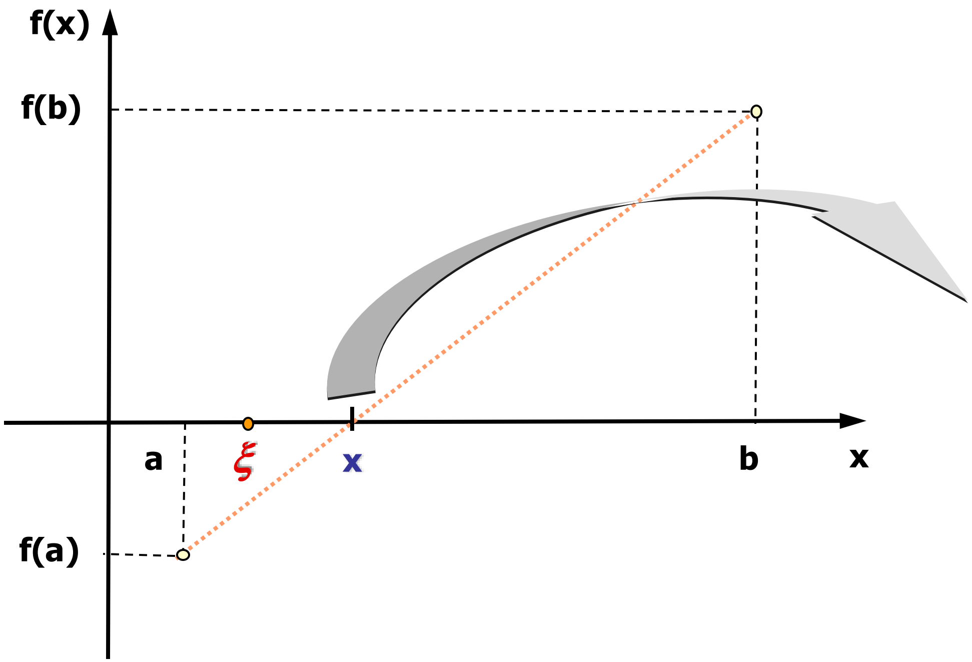
$\varepsilon = 0{,}002$

Cálculo Numérico – **Falsa Posição**

- **Método da *Bissecção***
  - **Calcula a média aritmética dos limites do intervalo que contém a raiz (*[a, b]*)**
- **Método da *Falsa Posição***
  - **Calcula a média ponderada dos limites do intervalo que contém a raiz (*[a, b]*)**

Cálculo Numérico – **Falsa Posição**

- **Método da *Falsa Posição***
  - **Calcula a média ponderada dos limites do intervalo que contém a raiz (*[a, b]*)**



$$x = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}$$

$$x = \frac{a|f(b)| - b|f(a)|}{|f(b)| - |f(a)|}$$

Cálculo Numérico – **Falsa Posição**

- **Definição do Intervalo Inicial**
  - **Atribui-se *[a,b]* como *intervalo inicial***
    - $a_0 = a$
    - $b_0 = b$
  - **Condições de Aplicação**
    - $f(a)*f(b) < 0$
    - **Sinal da derivada *constante***

Cálculo Numérico – **Falsa Posição**

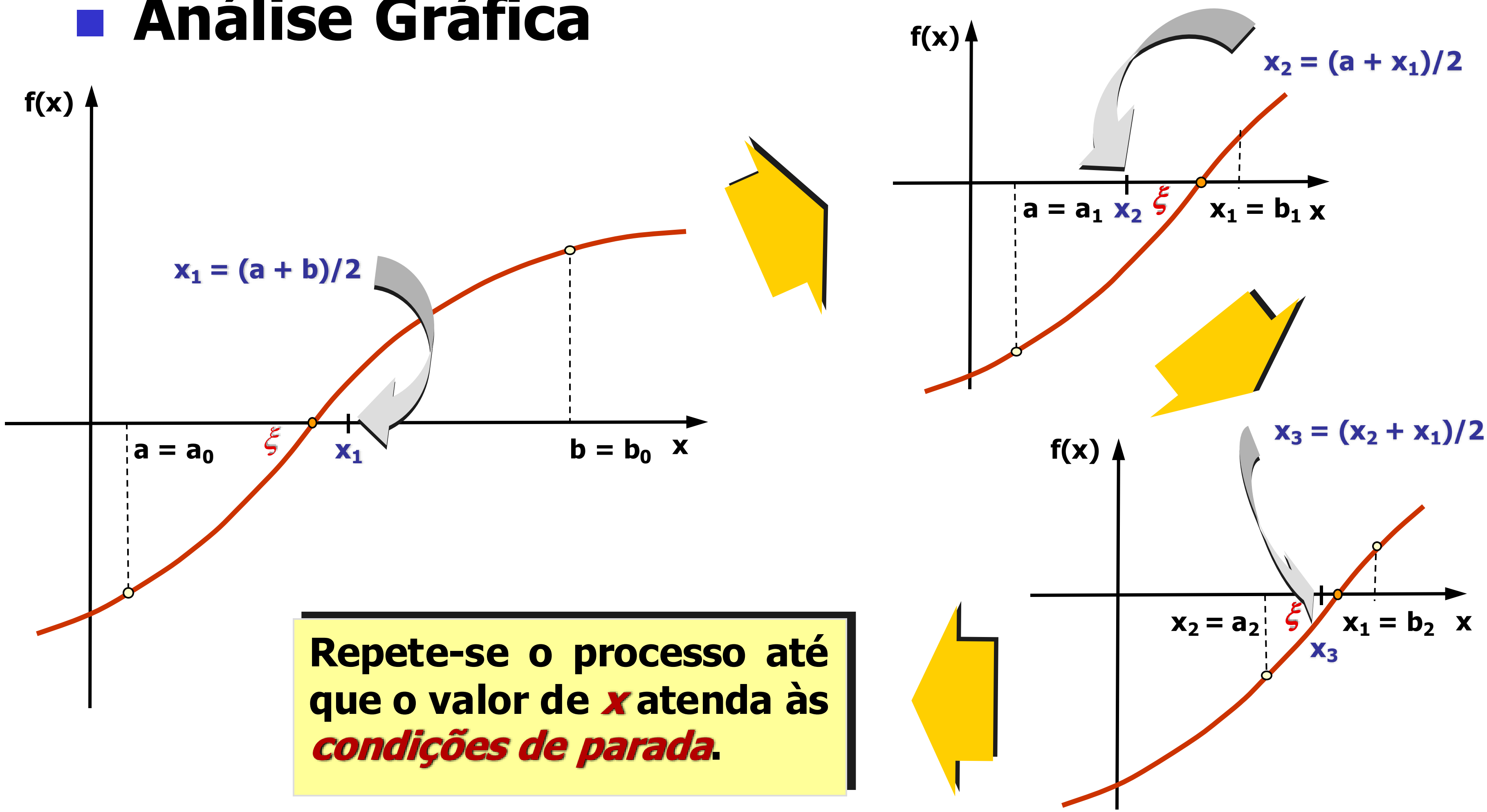
- **Definição dos Subintervalos**
  - **Subdivide-se o intervalo pelo *ponto de intersecção* da reta que liga *f(a)* a *f(b)* e o eixo das abscissas**
  - **Verifica-se se, através do teste de parada, se x_1 é uma *aproximação da raiz* da equação (ξ)**
    - **Se *verdadeiro* ⇨ x_1 é a *raiz* procurada**
    - ***Caso contrário* ⇨ define-se um *novo* intervalo**

Cálculo Numérico – **Falsa Posição**

- **Definição do Novo Intervalo**
  - **Determina-se qual subintervalo - *$[a_0, x_1]$* ou *$[x_1, b_0]$* - contém a raiz ξ**
    - **Calcula-se o produto *$f(a)*f(x_1)$***
    - **Verifica-se se *$f(a)*f(x_1) < 0$***
      - **Se *verdadeiro* ⇨ $\xi \in (a_0, x_1)$**
        Logo: $a_1 = a_0$ e $b_1 = x_1$
      - ***Caso contrario* ⇨ $\xi \in (x_1, b_0)$**
        Logo $a_1 = x_1$ e $b_1 = b_0$
  - **Repete-se o processo até que o valor de *x* atenda às *condições de parada*.**

Cálculo Numérico – **Falsa Posição**

- **Análise Gráfica**



Repete-se o processo até que o valor de *x* atenda às *condições de parada*.

Cálculo Numérico – **Falsa Posição**

- **Condições de Parada**
  - **Se os valores fossem *exatos***
    - $f(x) = 0$
    - $(x_k - x_{k+1})/x_k = 0$
  - ***Não o sendo***
    - $|f(x)| \leq$ *tolerância*
    - $|(x_k - x_{k+1})/x_k| \leq$ *tolerância*

Cálculo Numérico – **Falsa Posição**

Algoritmo

$k := 0;\ a_0 := a;\ b_0 := b;\ x_0 := a;\ F_0 := f(a_0);\ G_0 := f(b_0);$

$x_{k+1} := a_k - F_k(b_k - a_k)/(G_k - F_k);$ ou $x_{k+1} := (a_k G_k - b_k F_k)/(G_k - F_k);$

while critério de convergência não satisfeito *and* $k \leq L$

  if $f(a_k)f(x_{k+1}) \leq 0$ *then* /* raiz em $[a_k, x_{k+1}]$ */

    $a_{k+1} := a_k;\ b_{k+1} := x_{k+1};$

  else /* raiz em $[x_{k+1}, b_k]$ */

    $a_{k+1} := x_{k+1};\ b_{k+1} := b_k;$

  endif

  $k := k+1;\ x_{k+1} := a_k - F_k(b_k - a_k)/(G_k - F_k);$

endwhile

if $k > L$

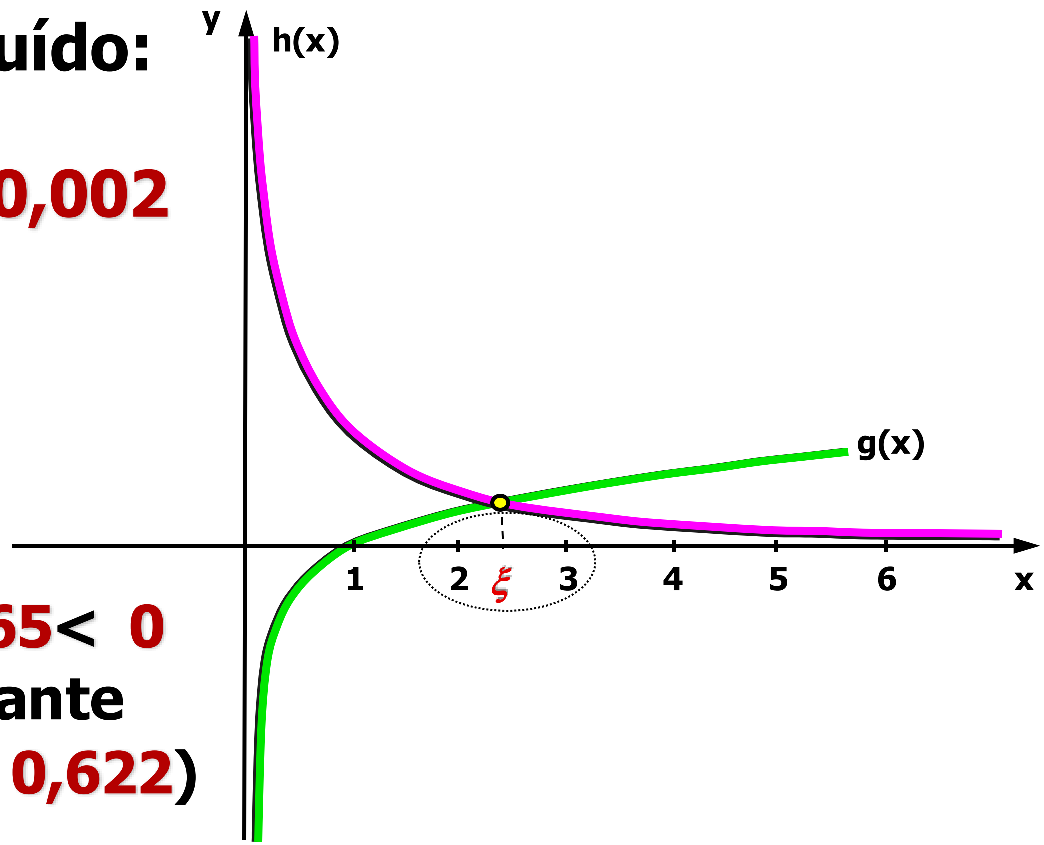
  convergência falhou

endif

Cálculo Numérico – **Falsa Posição**

Exemplo 08: Considerando *$f(x) = x\log x - 1$*

Intervalo inicial atribuído:
[2, 3]
Considerando-se ε = 0,002
$f(a_0) = -0,3979$
$f(b_0) = 0,4314$



$f'(x) = \log x + 1/x\ln 10$
$f(a_0) * f(b_0) = -0,017165 < 0$
Sinal da derivada constante
($f'(a_0) = 0,52$ e $f'(b_0) = 0,622$)

Cálculo Numérico – **Falsa Posição**

Exemplo 08:

- **Cálculo da 1ª aproximação: $a_0 = 2$ $b_0 = 3$**

  $f(a_0) = -0,3979 < 0$

  $f(b_0) = 0,4314 > 0$

  $$x_1 = \frac{[2.0,4314 - 3.(-0,3979)]}{[0,4314 - (-0,3979)]} = 2,4798$$

  - **Teste de Parada**
    - $|f(x_1)| = |-0,0219| = 0,0219 >$ tolerância
  - **Escolha do Novo Intervalo**
    - $f(a_0).f(x_1) = (-0,3979).(-0,0219) > 0$

      logo: $a_1 = x_1 = 2,4798$ e $b_1 = b_0 = 3$

Cálculo Numérico – **Falsa Posição**

Exemplo 08:

- **Cálculo da 2ª aproximação:** $a_1 = 2{,}4798$ $b_1 = 3$

  $f(a_1) = -0{,}0219 < 0$

  $f(b_1) = 0{,}4314 > 0$

  $$x_2 = \frac{[2{,}4798 . 0{,}4314 - 3.(-0{,}0219)]}{[0{,}4314 - (-0{,}0219)]} = 2{,}5049$$

  - **Teste de Parada**
    - $|f(x_2)| = |-0{,}0011| = 0{,}0011 <$ tolerância
  - **Escolha do Novo Intervalo**
    - $f(a_1).f(x_2) = (-0{,}0219).(-0{,}0011) > 0$

      logo: $a_2 = x_2 = 2{,}5049$ e $b_2 = b_1 = 3$

Cálculo Numérico – **Falsa Posição**

Exemplo 08:

- **Cálculo da 3ª aproximação $a_2 = 2{,}5049$ $b_2 = 3$**

  $f(a_2) = -\,0{,}0011 < 0$

  $f(b_2) = 0{,}4314 > 0$

  $$x_3 = \frac{[2{,}5049 . 0{,}4314 - 3.(-\,0{,}0011)]}{[0{,}4314 - (-\,0{,}0011)]} = 2{,}5061$$

  - **Teste de Parada**

    - $|f(x_3)| = |-\,7{,}0118.10^{-5}| = 7{,}0118.10^{-5} < tol$

      (valor aceitável de raiz)

Cálculo Numérico – **Falsa Posição**

Exemplo 08: *f(x) = xlogx - 1*

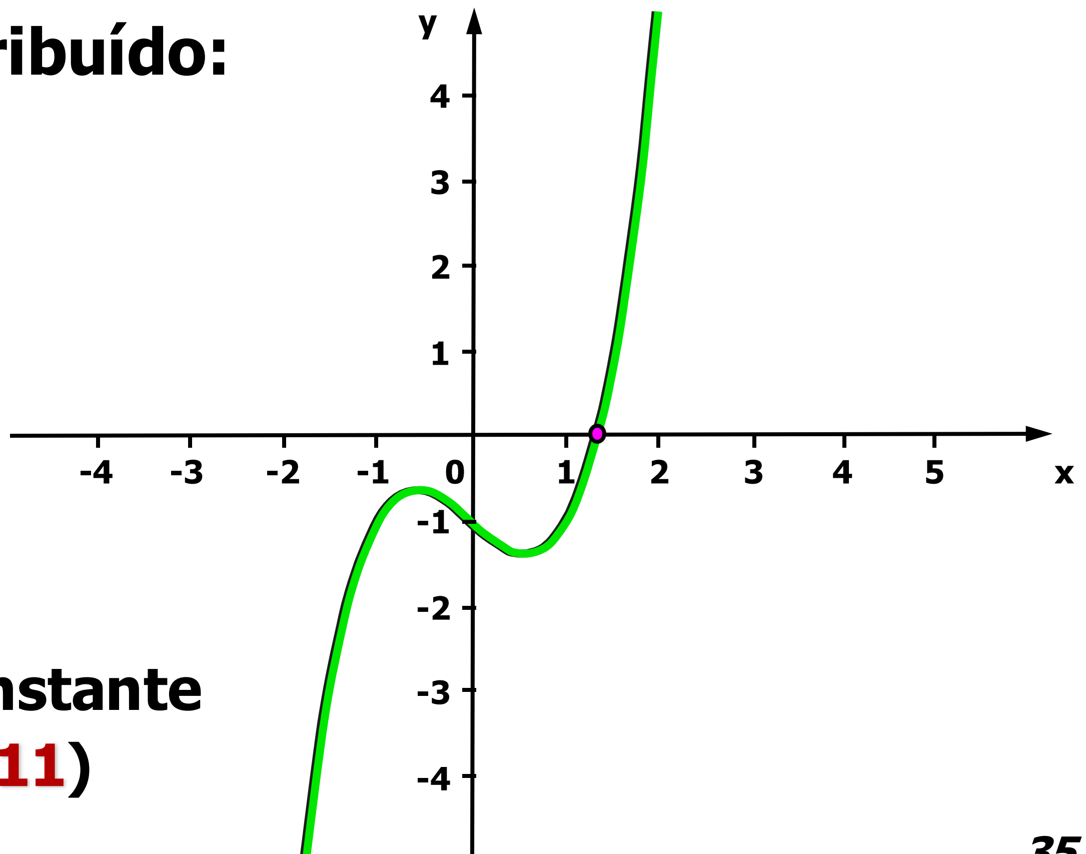
k	a_k	b_k	$f(a_k)$	$f(b_k)$	x_{k+1}	$f(x_{k+1})$
0	2,000000	3,000000	-0,3979000	0,431400	2,4798000	-0,021900
1	2,479800	3,000000	-0,0219000	0,431400	2,5049000	-0,001100
2	2,504900	3,000000	-0,0011000	0,431400	2,5061000	-0,000070

ε = *0,002*

Cálculo Numérico – **Falsa Posição**

Exemplo 09: Seja a função do Exemplo 07, $f(x) = x^3 - x - 1$

Intervalo inicial atribuído:
[1, 2]
tol = 0,002
$f(a_0) = -1$
$f(b_0) = 5$



$f'(x) = 3x^2 - 1$
$f(a_0)*f(b_0) = -5 < 0$
Sinal da derivada constante
$(f'(a_0) = 2$ e $f'(b_0) = 11)$

Cálculo Numérico – **Falsa Posição**

Exemplo 09:

- **Cálculo da 1ª aproximação $a_0 = 1 \quad b_0 = 2$**

$$f(a_0) = -1 < 0$$
$$f(b_0) = 5 > 0$$

$$x_1 = \frac{[1.5 - 2.(-1)]}{[5 - (-1)]} = 1{,}16667$$

- **Teste de Parada**
  - $|f(x_1)| = |-0{,}5787037| = 0{,}5787037 > tol$
- **Escolha do Novo Intervalo**
  - $f(a_0).f(x_1) = (-1).(-0{,}5787037) > 0$

    logo: $a_1 = x_1 = 1{,}16667$ e $b_1 = b_0 = 2$

Cálculo Numérico – **Falsa Posição**

Exemplo 09: $f(x) = x^3 - x - 1$

k	a_k	b_k	$f(a_k)$	$f(b_k)$	x_{k+1}	$f(x_{k+1})$
0	1,000000	2,000000	-1,0000000	5,000000	1,1666667	-0,578704
1	1,166667	2,000000	-0,5787037	5,000000	1,2531120	-0,285363
2	1,253112	2,000000	-0,2853630	5,000000	1,2934374	-0,129542
3	1,293437	2,000000	-0,1295421	5,000000	1,3112812	-0,056588
4	1,311281	2,000000	-0,0565885	5,000000	1,3189885	-0,024304
5	1,318988	2,000000	-0,0243037	5,000000	1,3222827	-0,010362
6	1,322283	2,000000	-0,0103618	5,000000	1,3236843	-0,004404
7	1,323684	2,000000	-0,0044039	5,000000	1,3242795	-0,001869

$\varepsilon = 0{,}002$

Cálculo Numérico – **Falsa Posição**

Vantagens:

- **Estabilidade e convergência para a solução procurada;**
- **Desempenho regular e previsível;**
- **Cálculos mais simples que o método de Newton.**

Cálculo Numérico – **Falsa Posição**

Desvantagens:

- **Lentidão do processo de convergência (requer o cálculo de *f(x)* em um elevado número de iterações);**
- **Necessidade de conhecimento prévio da região na qual se encontra a raiz de interesse (o que nem sempre é possível).**

Cálculo Numérico – **FPM**

- **Método da *Falsa Posição Modificado* (*FPM*)**

Dada uma função f(x) contínua no intervalo [a,b], o qual contém uma raiz única, é possível determinar tal raiz a partir de subdivisões sucessivas do intervalo que a contém, evitando, ao mesmo tempo, que as aproximações geradas pela fórmula de iteração se aproximem da raiz por um único lado.

- **Definição do Intervalo Inicial**
  - **Atribui-se *[a,b]* como *intervalo inicial***
    - $a_0 = a$
    - $b_0 = b$
  - **Condições de Aplicação**
    - $f(a)*f(b) < 0$
    - **Sinal da derivada *constante***

Cálculo Numérico – **FPM**

- **Definição dos Subintervalos**
  - **Subdivide-se o intervalo pelo *ponto de intersecção* da reta que liga *f(a)* a *f(b)* e o eixo das abscissas**
  - **Verifica-se se x_1 é uma *aproximação da raiz* da equação (ξ)**
    - **Se *verdadeiro* ⇨ x_1 é a *raiz procurada***
    - ***Caso contrário* ⇨ define-se um *novo* intervalo**

Definição do Novo Intervalo

- **Determina-se em qual dos subintervalos** ***[a_0, x_1]*** **ou** ***[x_1, b_0]*** **- se encontra a raiz** ξ
- **1º Teste**
  - **Verifica-se se** ***$f(a)*f(x_1)$*** **<** ***0***
    - **Se** ***verdadeiro*** $\Rightarrow \xi \in (a_0, x_1)$

      Logo: $a_1 = a_0$ e $b_1 = x_1$
    - ***Caso contrario*** $\Rightarrow \xi \in (x_1, b_0)$

      Logo $a_1 = x_1$ e $b_1 = b_0$

Cálculo Numérico – **FPM**

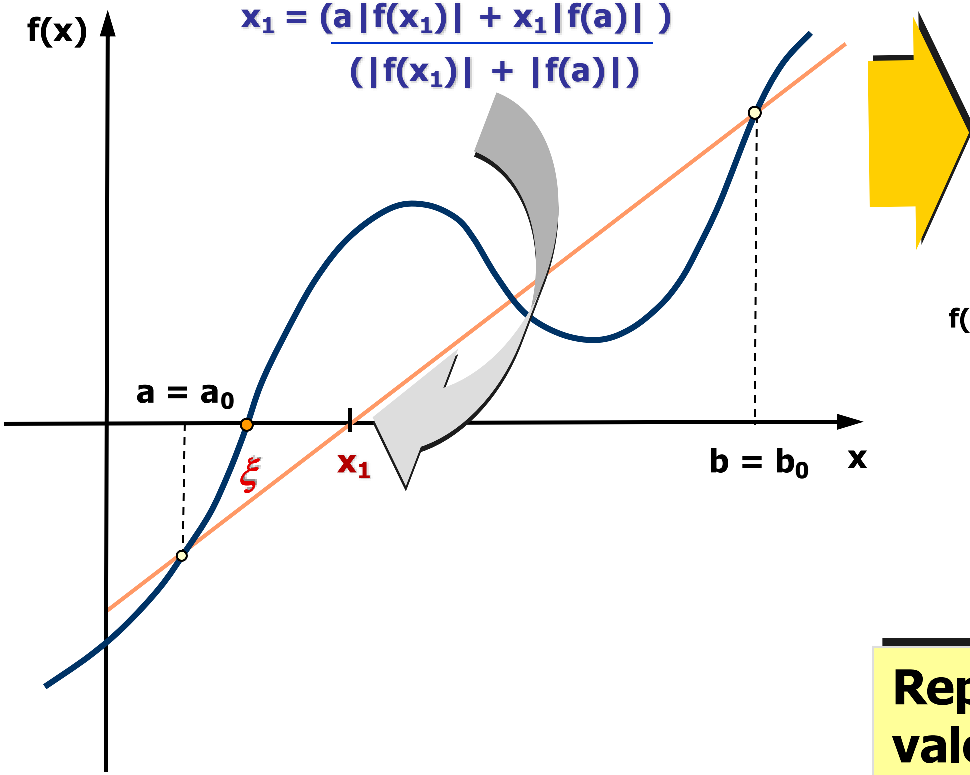
- **Definição do novo valor de x**
  - **2º Teste**
  - **Verifica-se se** $f(x_i)*f(x_{i+1}) > 0$
    - **Caso seja *verdadeiro***
      - ***Se*** $f(a)*f(x_1) < 0$

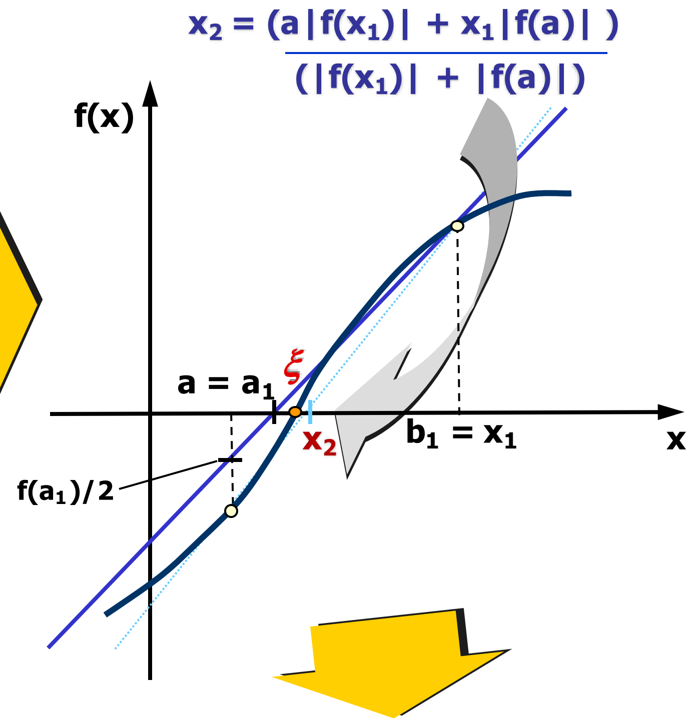
        Se verdadeiro faz-se f(a)/2

        Caso contrário faz-se f(b)/2
    - ***Caso contrario*** ⇨ **Permanecem os valores**
  - **Repete-se o processo até que o valor de *x* atenda às *condições de parada*.**

Cálculo Numérico – **FPM**

- **Análise Gráfica**





Repete-se o processo até que o valor de *x* atenda às *condições de parada*.

Cálculo Numérico – **FPM**

- **Condições de parada**
  - **Se os valores fossem *exatos***
    - $f(x) = 0$
    - $(x_k - x_{k+1})/x_k = 0$
  - ***Não o sendo***
    - $|f(x)| \leq$ *tolerância*
    - $|(x_k - x_{k+1})/x_k| \leq$ *tolerância*

Cálculo Numérico – **FPM**

Algoritmo

$k := 0;\ a_0 := a;\ b_0 := b;\ x_0 := a;\ F_0 := f(a_0);\ G_0 := f(b_0);$

$x_{k+1} := a_k - F_k(b_k - a_k)/(G_k - F_k);$

while critério de convergência não satisfeito **and** $k \leq L$

  if $f(a_k)f(x_{k+1}) \leq 0$ **then** /* raiz em $[a_k, x_{k+1}]$ */

    $a_{k+1} := a_k;\ b_{k+1} := x_{k+1};\ G_{k+1} = f(x_{k+1})$

    if $f(x_k)f(x_{k+1}) > 0$ **then** $F_{k+1} = F_k/2$

    endif

  else /* raiz em $[x_{k+1}, b_k]$ */

    $a_{k+1} := x_{k+1};\ b_{k+1} := b_k;\ F_{k+1} = f(x_{k+1})$

    if $f(x_k)f(x_{k+1}) > 0$ **then** $G_{k+1} = G_k/2$

    endif

  endif

  $k := k+1;\ x_{k+1} := a_k - F_k(b_k - a_k)/(G_k - F_k);$

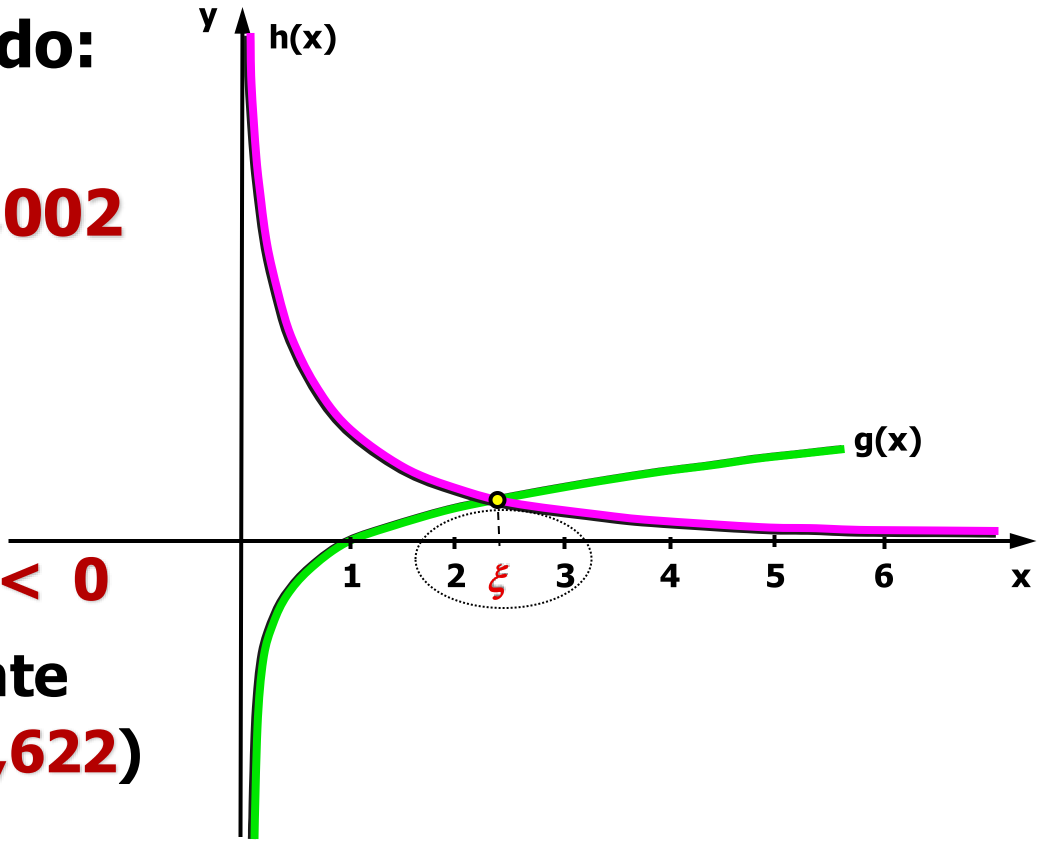
endwhile

if $k \leq L$

  x_{k+1} é uma aproximação aceitável para a raiz

endif

Exemplo 10: Considerando $f(x) = x\log x - 1$



Intervalo inicial atribuído:
[2, 3]

Considerando-se $\varepsilon = 0{,}002$

$f(a_0) = -0{,}3979$
$f(b_0) = 0{,}4314$

$f'(x) = \log x + 1/x\ln 10$
$f(a_0) * f(b_0) = -0{,}017165 < 0$

Sinal da derivada constante
$(f'(a_0) = 0{,}52$ e $f'(b_0) = 0{,}622)$

Cálculo Numérico – **FPM**

Exemplo 10:

- **Cálculo da 1ª aproximação $a_0 = x_0 = 2 \quad b_0 = 3$**

  $f(a_0) = -0,3979 < 0$

  $f(b_0) = 0,4314 > 0$

  $$x_1 = \frac{[2 . 0,4314 - 3 . (-0,3979)]}{[0,4314 - (-0,3979)]} = 2,4798$$

  - **Teste de Parada**
    - $|f(x_1)| = |-0,0219| = 0,0219 > \text{tolerância}$
  - **Escolha do Novo Intervalo**
    - $f(a_0) . f(x_1) = (-0,3979) . (-0,0219) > 0$

      logo: $a_1 = x_1 = 2,4798$ e $b_1 = b_0 = 3$

Exemplo 10:

- **Cálculo da 2ª aproximação a_1 = 2,4798 b_1 = 3**

$$\left.\begin{array}{l} f(x_0).f(x_1) = (-\ 0{,}3979).(-\ 0{,}0219) > 0 \\ f(a_0).f(x_1) = (-\ 0{,}3979\ ).(-\ 0{,}0219) > 0 \end{array}\right\} \text{(faz } f(b)/2 \text{)}$$

$$f(a_1) = -\ 0{,}0219 \quad < 0$$

$$f(b_1) = 0{,}4314 \quad > 0$$

$$x_2 = \frac{[2{,}4798.(0{,}4314/2) - 3.(-\ 0{,}0219)]}{[(0{,}4314/2) - (-\ 0{,}0219)]} \Rightarrow$$

$$x_2 = 2{,}5277$$

Cálculo Numérico – **FPM**

Exemplo 10:

- **Cálculo da 2ª aproximação $a_1 = 2{,}4798$ $b_1 = 3$**
  - **Teste de Parada**
    - $|f(x_2)| = |0{,}018| = 0{,}018 > \varepsilon$
  - **Escolha do Novo Intervalo**
    - $f(a_1).f(x_2) = (-\,0{,}0219).(0{,}018) < 0$

      logo: $a_2 = a_1 = 2{,}4798$ e $b_2 = x_2 = 2{,}5277$

Cálculo Numérico – **FPM**

Exemplo 10:

- **Cálculo da 3ª aproximação: $a_2 = 2{,}4798$ e $b_2 = 2{,}5277$**

$$\left.\begin{array}{l} f(x_1).f(x_2) = (-\,0{,}0219).(0{,}018) < 0 \\ f(a_1).f(x_2) = (-\,0{,}0219).(0{,}018) < 0 \end{array}\right\}$$

(**Permanece** ***f(a)*** **e** ***f(b)***)

$$f(a_2) = -\,0{,}0219 < 0$$

$$f(b_2) = 0{,}018 > 0$$

$$x_3 = \frac{[2{,}4798.(0{,}018) - 2{,}5277.(-\,0{,}0219)]}{[(0{,}018) - (-\,0{,}0219)]} \Rightarrow$$

$$x_3 = 2{,}5060$$

Exemplo 10:

- **Cálculo da 3ª aproximação: a_2 = 2,4798 e b_2 = 2,5277**
  - **Teste de Parada**
    - $|f(x_3)| = |-0{,}000153| = 0{,}000153 < \varepsilon$

      (*valor aceitável de raiz*)

Cálculo Numérico – **FPM**

Exemplo 10: *$f(x) = x\log x - 1$*

k	a_k	b_k	$f(a_k)$	$f(b_k)$	x_{k+1}	$f(x_{k+1})$
0	2,000000	3,000000	-0,3979000	0,431400	2,4798000	-0,021900
1	2,479800	3,000000	-0,0219000	0,431400	2,5277000	0,018000
2	2,479800	2,527700	-0,0219000	0,018000	2,5060000	-0,000153

$\varepsilon = 0{,}002$

Cálculo Numérico – **FPM**

Exemplo 11: Seja a função do Exemplo 7, ***$f(x) = x^3 - x - 1$***

Intervalo inicial atribuído: [1, 2]

Considerando-se ε = 0,002

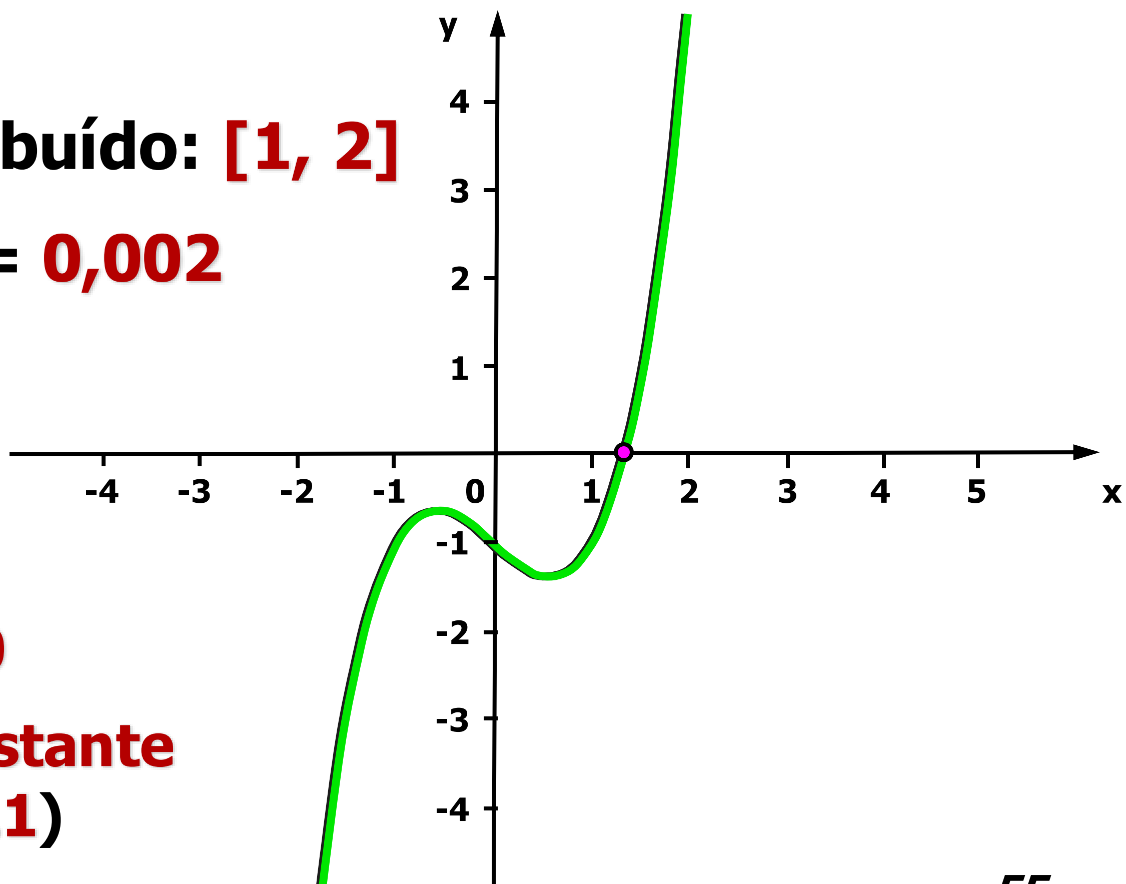
$f(a_0) = -1$

$f(b_0) = 5$

$f'(x) = 3x^2 - 1$

$f(a_0) * f(b_0) = -5 < 0$

Sinal da derivada constante ($f'(a_0) = 2$ e $f'(b_0) = 11$)



Exemplo 11:

- **Cálculo da 1ª aproximação $a_0 = x_0 = 1 \quad b_0 = 2$**

  $f(a_0) = -1 < 0$

  $f(b_0) = 5 > 0$

  $$x_1 = \frac{[1.5 - 2.(-1)]}{[5 - (-1)]} = 1{,}16667$$

  - **Teste de Parada**
    - $|f(x_1)| = |-0{,}5787| = 0{,}5787 > \varepsilon$

Cálculo Numérico – **FPM**

Exemplo 11:

- **Cálculo da 1ª aproximação $a_0 = x_0 = 1$ $b_0 = 2$**
  - **Escolha do Novo Intervalo**
    - **$f(a_0).f(x_1) = (-1).(-0{,}5787) > 0$**

      logo: $a_1 = x_1 = 1{,}16667$ e $b_1 = b_0 = 2$

Exemplo 11:

- **Cálculo da 2ª aproximação: $a_1 = 1{,}16667$ e $b_1 = 2$**

$$\left.\begin{aligned} f(x_0).f(x_1) &= (-1).(-0{,}5787) > 0 \\ f(a_0).f(x_1) &= (-1).(-0{,}5787) > 0 \end{aligned}\right\} \boxed{\text{(Faz } f(b)/2\text{)}}$$

$$f(a_1) = -0{,}5787 < 0$$

$$f(b_1) = 5 > 0$$

$$x_2 = \frac{[1{,}16667.(5/2) - 2.(-0{,}5787)]}{[(5/2) - (-0{,}5787)]} = 1{,}3233$$

Exemplo 11:

- **Cálculo da 2ª aproximação: $a_1 = 1{,}16667$ e $b_1 = 2$**
  - **Teste de Parada**
    - $|f(x_2)| = |-0{,}00604| = 0{,}00604 > \varepsilon$
  - **Escolha do Novo Intervalo**
    - $f(a_1).f(x_2) = (-0{,}5787).(-0{,}00604) > 0$

      logo: $a_2 = x_2 = 1{,}3233$ e $b_2 = b_1 = 2$

Cálculo Numérico – **FPM**

Exemplo 11:

- **Cálculo da 3ª aproximação: a_2 = 1,3233 e b_2 = 2**

$$\left.\begin{aligned} f(x_1).f(x_2) &= (-\,0{,}5787).(-\,0{,}00604) > 0 \\ f(a_1).f(x_2) &= (-\,0{,}5787).(-\,0{,}00604) > 0 \end{aligned}\right\}$$

(Faz *f(b)/2*)

$$f(a_2) = -\,0{,}00604 < 0$$

$$f(b_2) = 5 > 0$$

$$x_3 = \frac{[1{,}3233.(5/2) - 2.(-\,0{,}0064)]}{[(5/2) - (-\,0{,}0064)]} = 1{,}32493$$

Exemplo 11:

- **Cálculo da 3ª aproximação: a_2 = 1,3233 e b_2 = 2**
  - **Teste de Parada**
    - $|f(x_3)| = |0{,}00078| = 0{,}00078 < \varepsilon$

      (***valor aceitável de raiz***)

Exemplo 11: $f(x) = x^3 - x - 1$

k	a_k	b_k	$f(a_k)$	$f(b_k)$	x_{k+1}	$f(x_{k+1})$
0	1,000000	2,000000	-1,0000000	5,000000	1,1666700	-0,578700
1	1,166670	2,000000	-0,5787000	5,000000	1,3233000	-0,006040
2	1,323300	2,000000	-0,0060400	5,000000	1,3249300	0,000780

$\varepsilon = 0{,}002$

Cálculo Numérico – **Ponto Fixo**

- **Método do *Ponto Fixo* (*MPF*)**

Dada uma função $f(x)$ contínua no intervalo $[a,b]$ onde existe uma raiz única, $f(x) = 0$, é possível transformar tal equação em uma equação equivalente $x = g(x)$ e, a partir de uma aproximação inicial x_0, gerar uma seqüência $\{x_k\}$ de aproximações para ξ pela relação $x_{k+1} = g(x_k)$, uma vez que $g(x)$ é tal que $f(\xi) = 0$ se e somente se $g(\xi) = \xi$.

Cálculo Numérico – **Ponto Fixo**

- **Método do *Ponto Fixo* (*MPF*)**

Implicação de tal procedimento:

Problema de determinação de um zero de *f(x)*

Problema de determinação de um ponto fixo de *g(x)*

Função de iteração

Cálculo Numérico – **Ponto Fixo**

- **Método do *Ponto Fixo* (*MPF*)**

  Forma geral das funções de iteração:

$$g(x) = x + A(x)f(x)$$

  com $A(\xi) \neq 0$ em ξ, *ponto fixo* de $g(x)$.

- **Interpretação Gráfica**
  - $x = g(x)$ **tem como raiz a abcissa do ponto de intersecção da reta $r(x) = x$ e da curva $g(x)$.**

Cálculo Numérico – **Ponto Fixo**

Exemplo 12:

Seja a equação $x^2 + x - 6 = 0$.

Funções de iteração possíveis:

$g_1(x) = 6 - x^2$

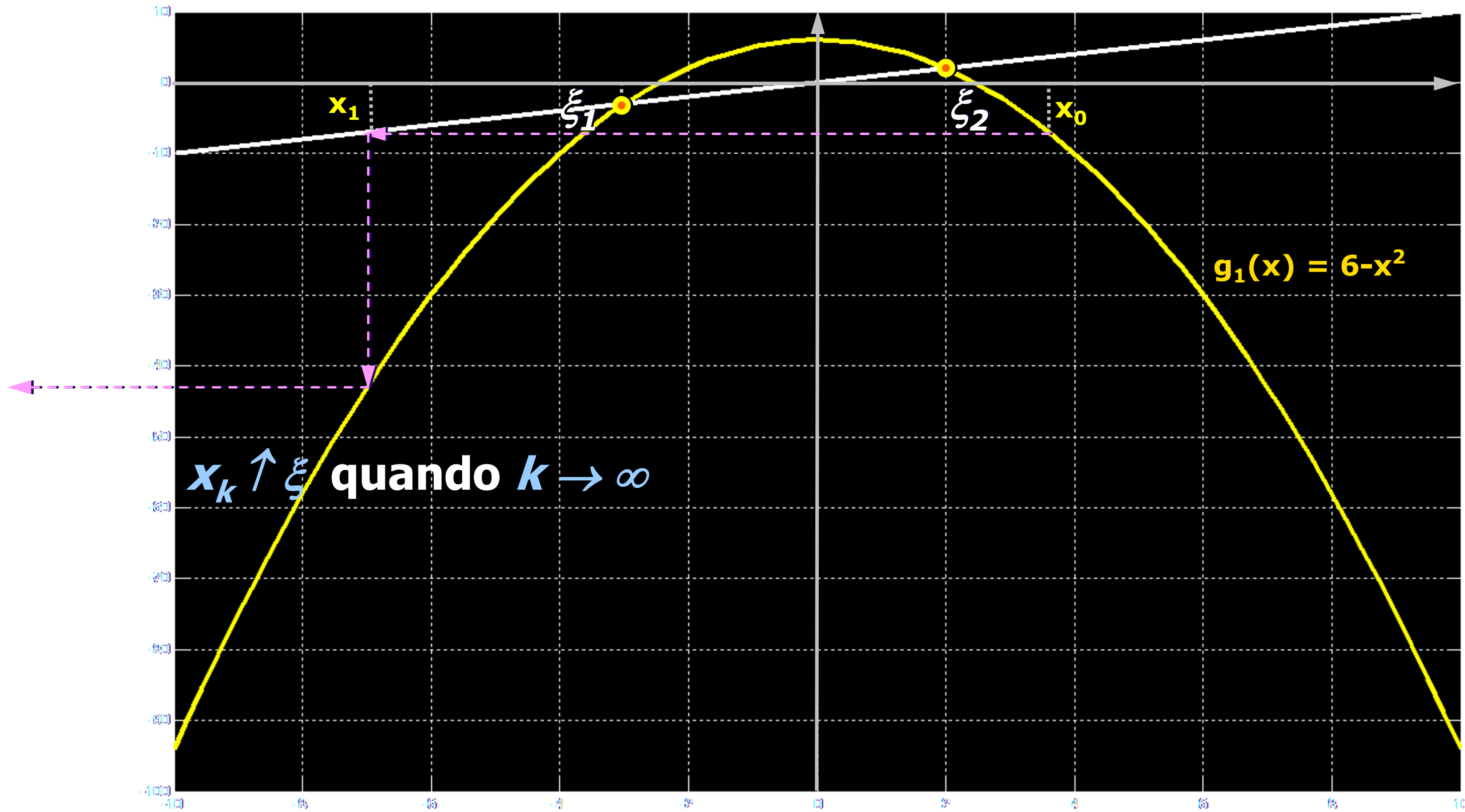
- $g_2(x) = \pm\sqrt{6 - x}$
- $g_3(x) = 6/x - 1$
- $g_4(x) = 6/(x + 1)$

Dada uma equação do tipo $f(x) = 0$, há para tal equação *mais de uma função* de iteração $g(x)$, tal que: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = g(x)$

Cálculo Numérico – **Ponto Fixo**

- **Análise Gráfica da Convergência**

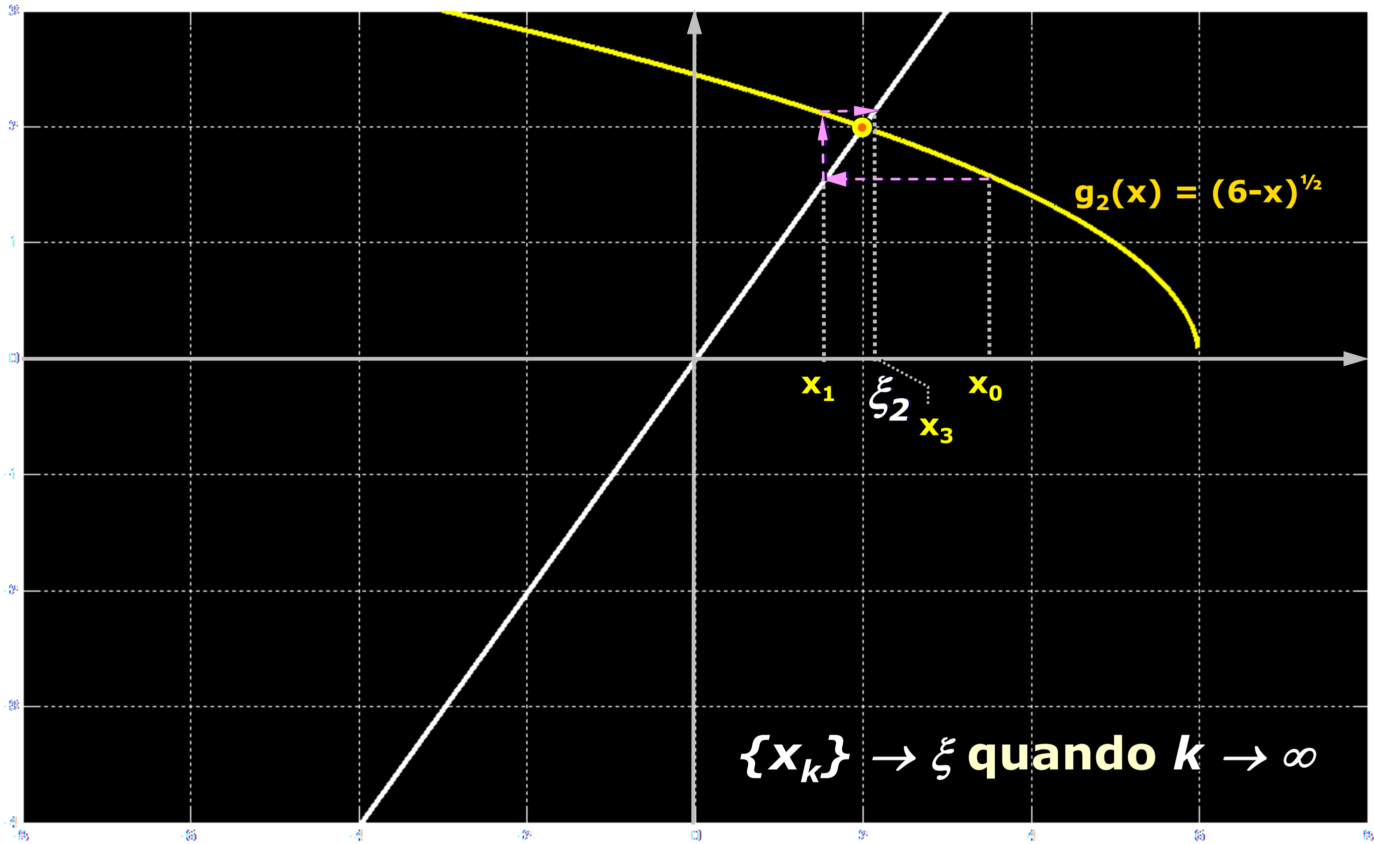
Situação 1



Cálculo Numérico – **Ponto Fixo**

- **Análise gráfica da Convergência**

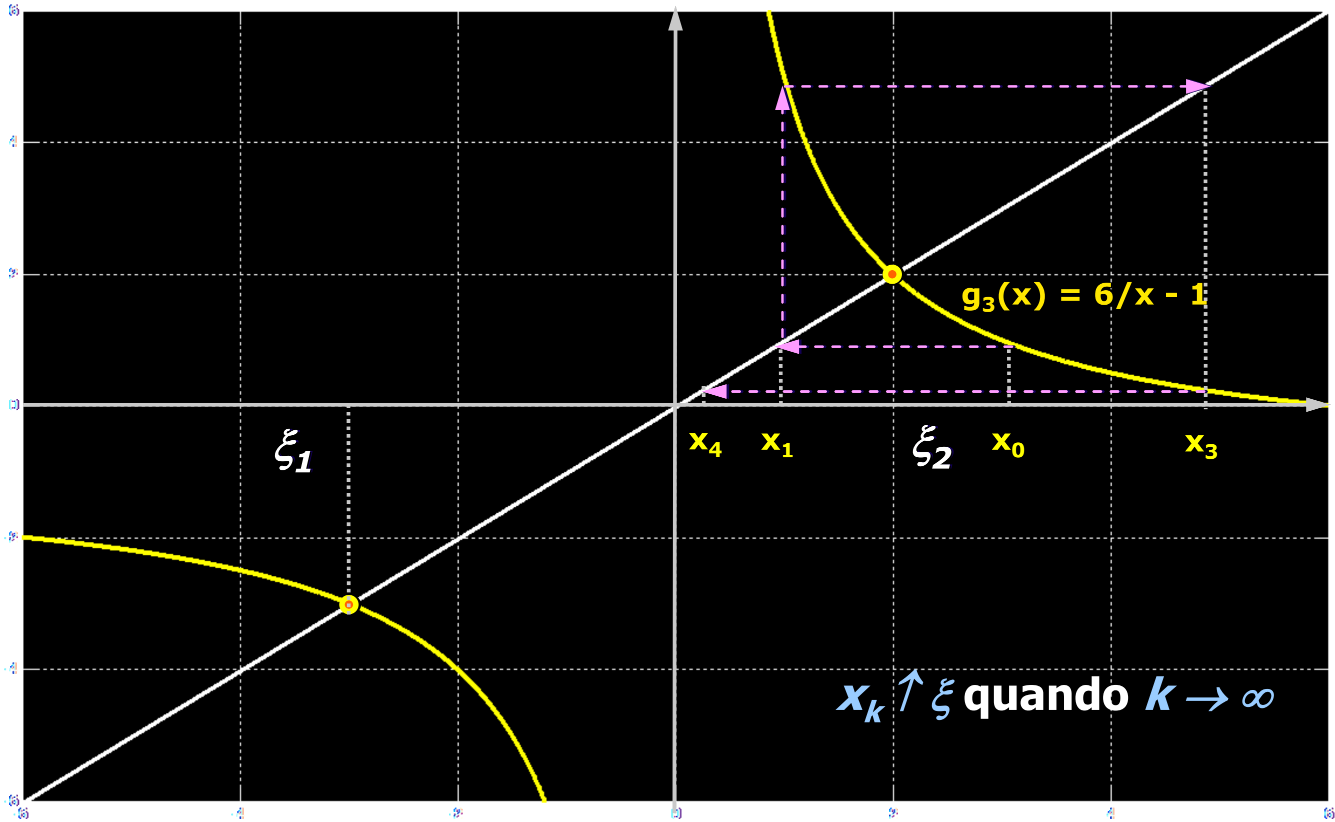
Situação 2



Cálculo Numérico – **Ponto Fixo**

- **Análise Gráfica da Convergência**

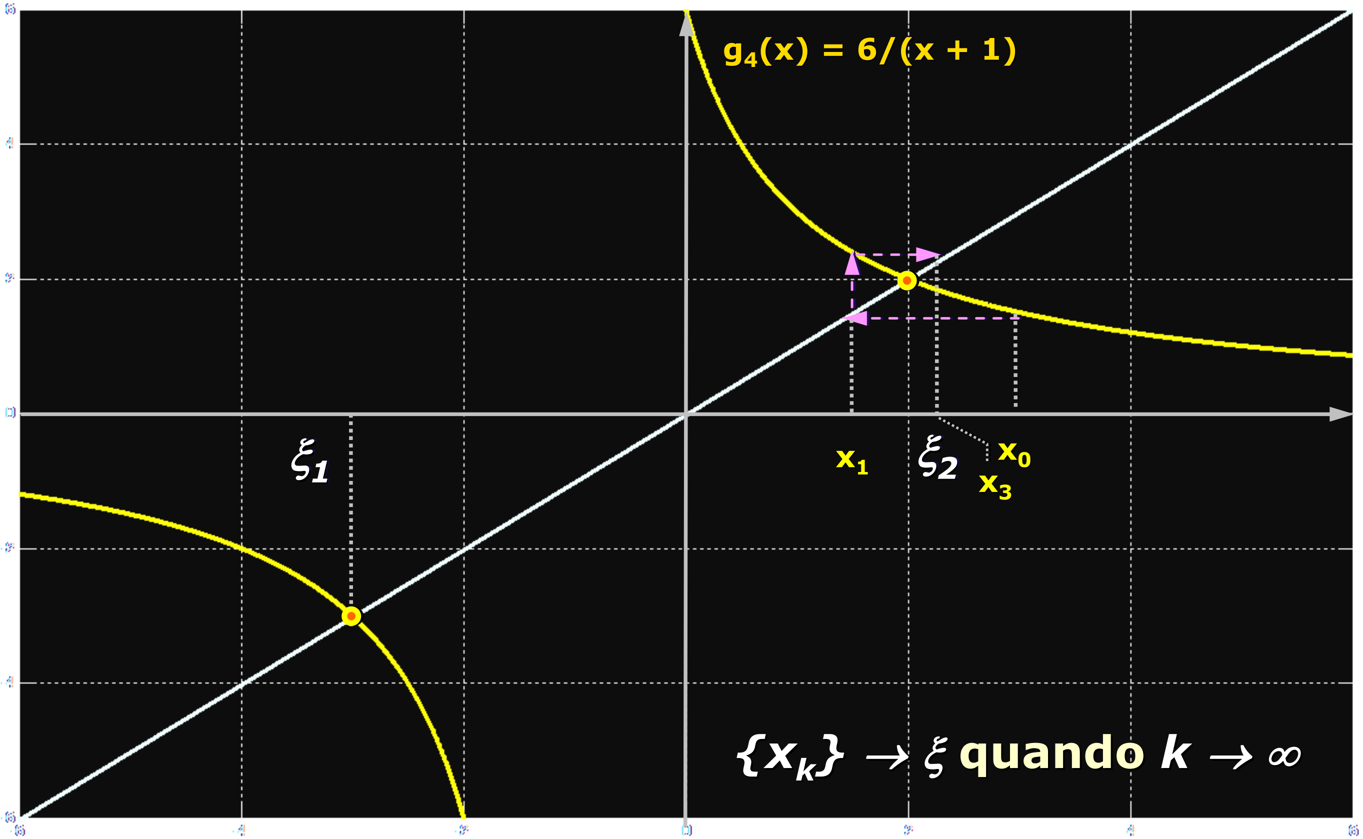
Situação 3



Cálculo Numérico – **Ponto Fixo**

- **Análise gráfica da Convergência**

Situação 4



Cálculo Numérico – **Ponto Fixo**

Exemplo 13: Seja a seguinte equação $x^2 + x - 6 = 0$:

- **Não há necessidade de uso de método numérico para a determinação das raízes $\xi_1 = -3$ e $\xi_2 = 2$**
- **Utilização desta exemplo para demonstrar a convergência ou divergência numérica e gráfica do processo iterativo**
- **Seja a raiz $\xi_2 = 2$ e $g_1(x) = 6 - x^2$**
- **Considere-se $x_0 = 1{,}5$ e $g(x) = g_1(x)$**

Cálculo Numérico – **Ponto Fixo**

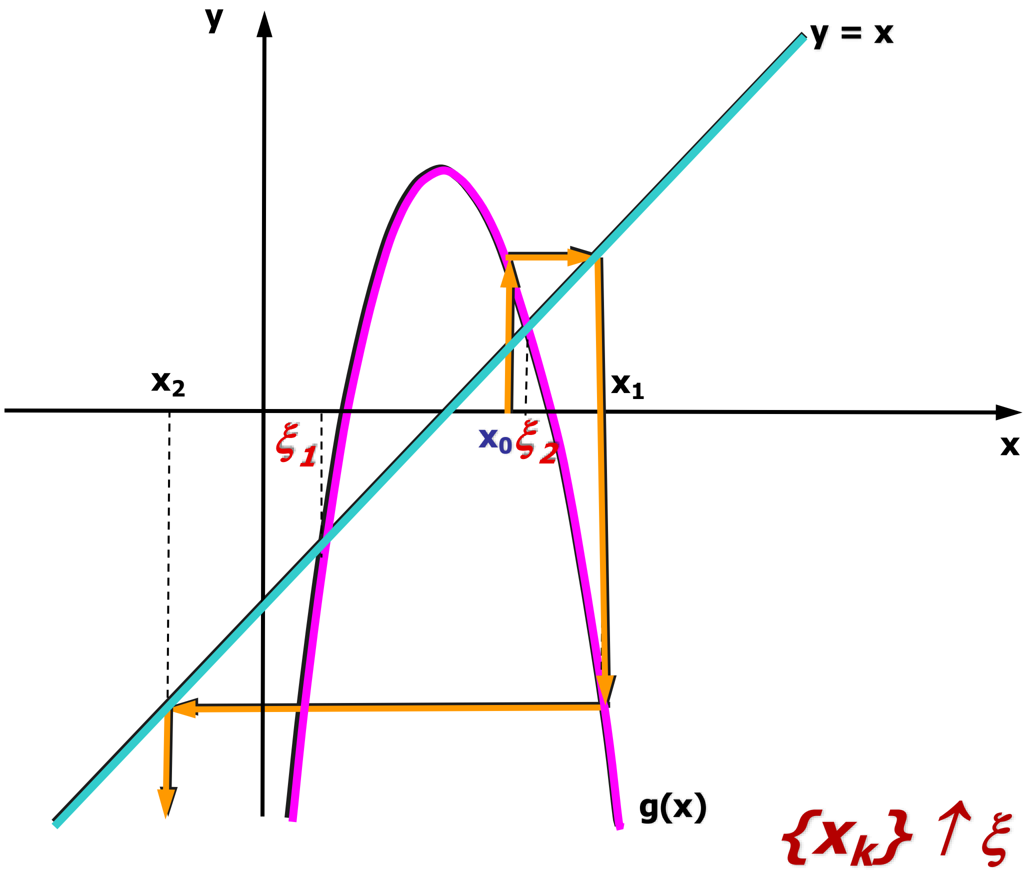
Exemplo 13:Seja a raiz $\xi_2 = 2$, $x_0 = 1{,}5$ e $g_1(x) = 6 - x^2$:

- $x_1 = g(x_0) = 6 - 1{,}5^2 = 3{,}75$
- $x_2 = g(x_1) = 6 - 3{,}75^2 = -8{,}0625$
- $x_3 = g(x_2) = 6 - (-8{,}0625)^2 = -59{,}003906$
- $x_4 = g(x_3) = 6 - (-59{,}003906)^2 = -3475{,}4609$

$$\vdots$$

- **Conclui-se que $\{x_k\}$ não convergirá para $\xi_2 = 2$**

Exemplo 13: Análise Gráfica:



Exemplo 14: Seja a raiz $\xi_2 = 2$, $g_2(x) = \sqrt{6 - x}$ e $x_0 = 1{,}5$

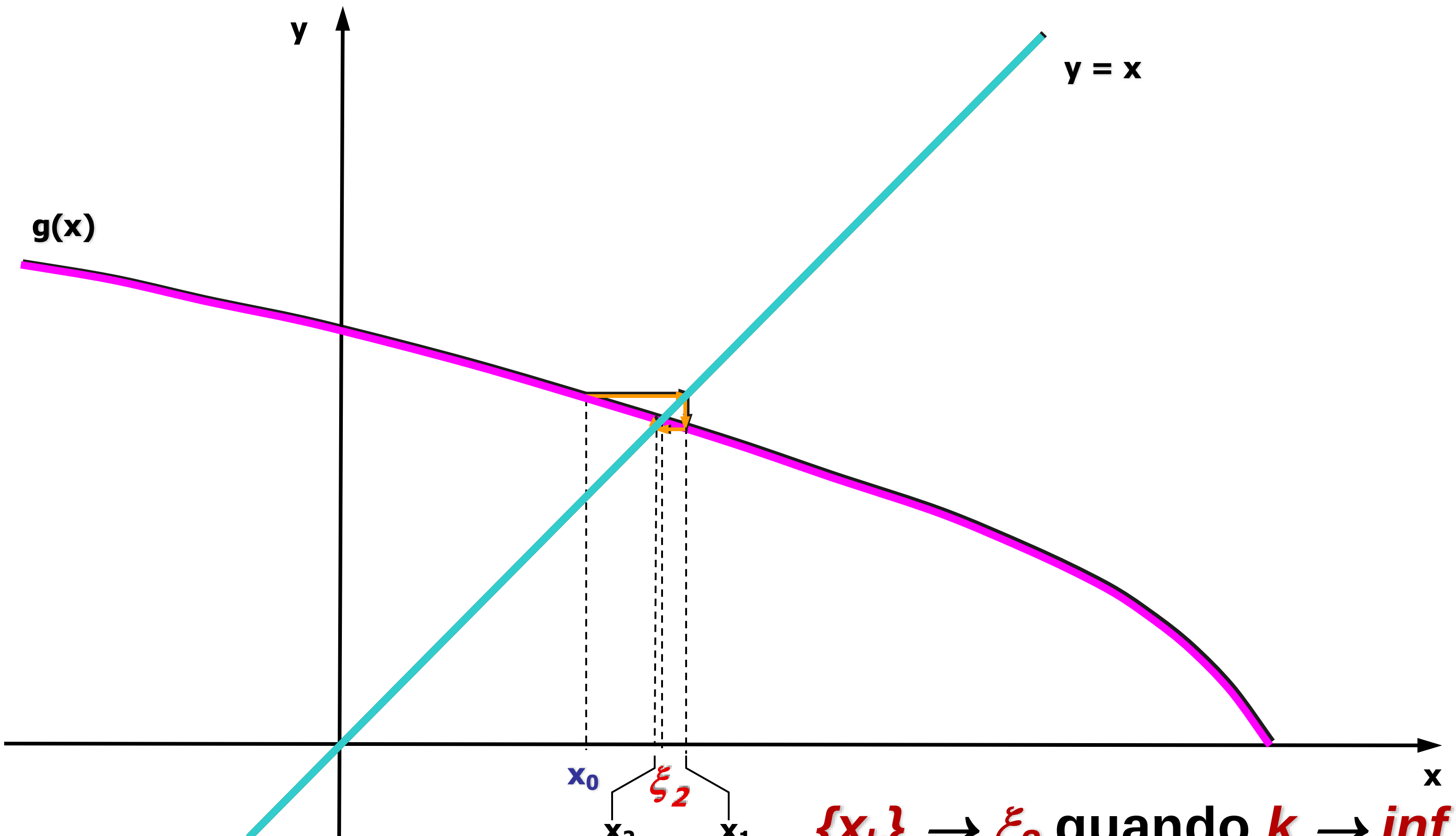
- $x_1 = g(x_0) = \sqrt{6 - 1{,}5} = 2{,}121320343$
- $x_2 = g(x_1) = \sqrt{6 - 2{,}121320343} = 1{,}969436380$
- $x_3 = g(x_2) = \sqrt{6 - 1{,}969436380} = 2{,}007626364$
- $x_4 = g(x_3) = \sqrt{6 - 2{,}007626364} = 1{,}998092499$
- $x_5 = g(x_4) = \sqrt{6 - 1{,}998092499} = 2{,}000476818$

$$\vdots$$

- **Conclui-se que $\{x_k\}$ tende a convergir para $\xi_2 = 2$**

Cálculo Numérico – **Ponto Fixo**

Exemplo 14: Análise Gráfica



$\{x_k\} \rightarrow \xi_2$ quando $k \rightarrow inf$

Cálculo Numérico – **Ponto Fixo**

Exemplo 15: Seja a equação $x^3 - x - 1 = 0$**, Tem-se as seguintes funções de iteração possíveis:**

- $g_1(x) = x^3 - 1$
- $g_2(x) = \pm\sqrt[3]{1 + x}$
- $g_3(x) = 1/x^3 - 1$

Dada uma equação do tipo $f(x) = 0$**, há para tal equação** ***mais de uma função*** **de iteração** $g(x)$**, tal que:** $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = g(x)$

Cálculo Numérico – **Ponto Fixo**

Exemplo 15: Seja $\xi = 1{,}324930$, $g_2(x) = \sqrt[3]{1 + x}$ e $x_0 = 1$

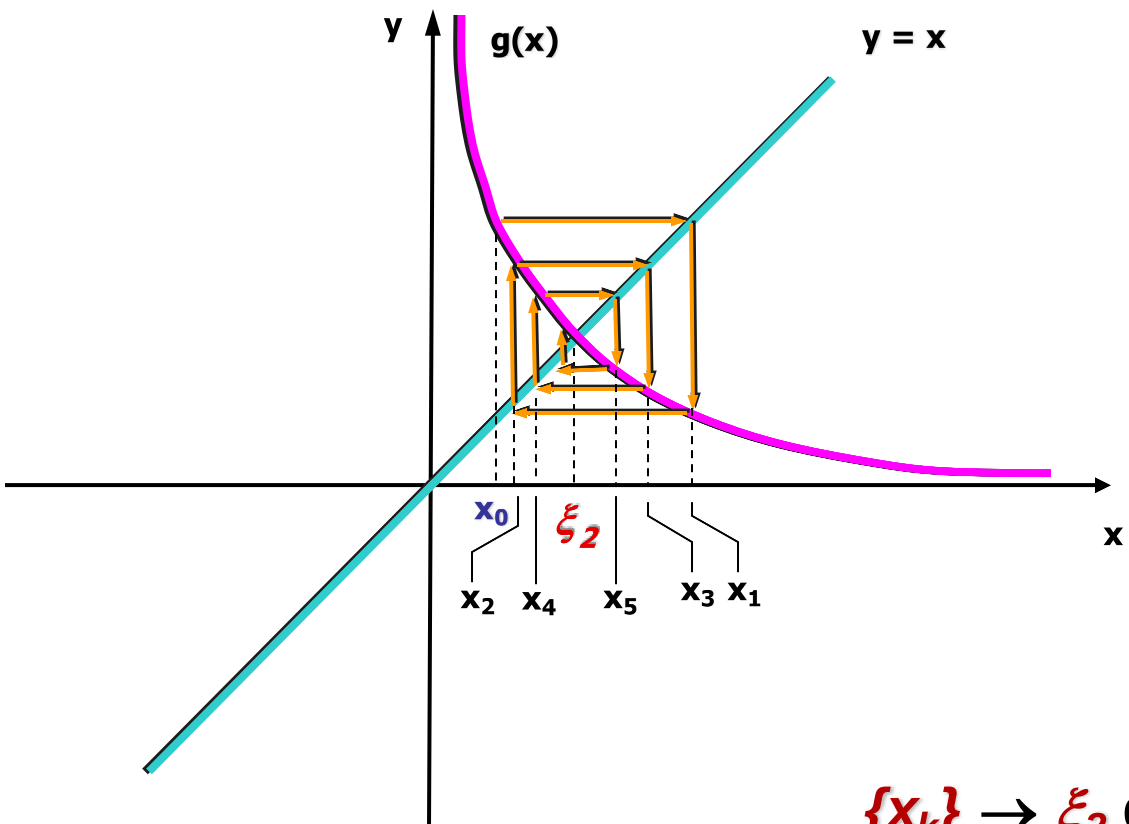
- $x_1 = g(x_0) = \sqrt[3]{1 + 1} = 1{,}259921$
- $x_2 = g(x_1) = \sqrt[3]{1 + 1{,}259921} = 1{,}312294$
- $x_3 = g(x_2) = \sqrt[3]{1 + 1{,}312294} = 1{,}322354$
- $x_4 = g(x_3) = \sqrt[3]{1 + 1{,}322354} = 1{,}324269$
- $x_5 = g(x_4) = \sqrt[3]{1 + 1{,}324269} = 1{,}324633$

$$\vdots$$

- **Conclui-se que $\{x_k\}$ tende a convergir para $\xi = 1{,}324930$**

Cálculo Numérico – **Ponto Fixo**

Exemplo 15: Análise Gráfica



$\{x_k\} \rightarrow \xi_2$ quando $k \rightarrow inf$

Cálculo Numérico – **Ponto Fixo**

- **TEOREMA 2:**

Sendo ξ uma raiz de $f(x) = 0$, isolada em um intervalo I centrado em ξ e $g(x)$ uma função de iteração para $f(x) = 0$. Se

1. ***$g(x)$ e $g'(x)$ são contínuas em I***
2. ***$|g'(x)| \leq M < 1$, $\forall x \in I$ e***
3. ***$x_1 \in I$***

então a seqüência $\{x_k\}$ gerada pelo processo iterativo $x_{k+1} = g(x_k)$ convergirá para ξ .

Exemplo 16: **Resgatando os Exemplos 13 e 14, verificou-se que:**

- $g_1(x)$ ⇨ **geração de uma seqüência divergente de** $\xi_2 = 2$
- $g_2(x)$ ⇨ **geração de uma seqüência convergente p/** $\xi_2 = 2$
- $g_1(x) = 6 - x^2$ **e** $g'_1(x) = -2x$ ⇨ **contínuas em** I

Exemplo 16: **Resgatando os Exemplos 13 e 14, verificou-se que:**

- $|g'_1(x)| < 1 \Leftrightarrow |-2x| < 1 \Leftrightarrow -½ < x < ½$
- **Não existe um intervalo I centrado em $\xi_2=2$, tal que $|g'(x)| < 1, \forall x \in I \Rightarrow g_1(x)$ não satisfaz a condição 2 do Teorema 2 com relação a $\xi_2=2$.**

Exemplo 16:

- $g_2(x) = \sqrt{6-x}$ e $g'_2(x) = -(1/2\sqrt{6-x})$
  ⇨ $g_2(x)$ **é contínua em** $S = \{x \in R \mid x \leq 6\}$
  ⇨ $g'_2(x)$ **é contínua em** $S' = \{x \in R \mid x < 6\}$
- $|g'_2(x)| < 1 \Leftrightarrow |1/2\sqrt{6-x}| < 1 \Leftrightarrow x < 5{,}75$
- **É possível obter um intervalo** I **centrado em** $\xi_2=2$**, tal que todas as condições do Teorema 2 sejam satisfeitas.**

Cálculo Numérico – **Ponto Fixo**

- **Critérios de parada**
  - **Se os valores fossem *exatos***
    - $f(x_k) = 0$
    - $|x_k - x_{k-1}| = 0$
  - ***Não o sendo***
    - $|f(x_k)| \leq$ *tolerância*
    - $|x_k - x_{k-1}| \leq$ *tolerância*

Cálculo Numérico – **Ponto Fixo**

Algoritmo

$k := 0$; $x_0 := x$;

***while** critério de interrupção não satisfeito **and** $k \leq L$*

  $k := k + 1$;

  $x_{k+1} := g(x_k)$;

endwhile

Cálculo Numérico – **Ponto Fixo**

Algoritmo Completo I

(1) ***Seja $f(x) = 0$ e a equação equivalente $x = g(x)$***

Dados: x_0 (aprox. inicial) e ε_1 e ε_2 (precisões)

Supor que as hipóteses do Teorema 2 foram satisfeitas

(2) ***Se: $|f(x_0)| < \varepsilon_1$, então: $x' = x_0$. FIM***

(3) ***Senão: $k = 0$; $NI = 1$;***

Cálculo Numérico – **Ponto Fixo**

Algoritmo Completo II

(4) $x_{k+1} = g(x_k)$;

(5) *Se* $(|f(x_{k+1})| < \varepsilon_1$ *ou* $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon_2$ *ou* $NI > L)$

Então $x' = x_{k+1}$. *FIM*

(6) $x_k = x_{k+1}$; $NI = NI+1$

Volta para (4)

x' ⇨ **Raiz aproximada**

Cálculo Numérico – **Ponto Fixo**

Vantagens:

- **Rapidez processo de convergência;**
- **Desempenho regular e previsível.**

Cálculo Numérico – **Ponto Fixo**

Desvantagens:

- **Um inconveniente é a necessidade da obtenção de uma função de iteração *g(x)*;**
- **Difícil sua implementação.**

- **Método de *Newton-Raphson***

Dada uma função f(x) contínua no intervalo [a,b] onde existe uma raiz única, é possível determinar uma aproximação de tal raiz a partir da interseção da tangente à curva em um ponto x_0 com o eixo das abscissas.

x_0 - atribuído em função da geometria do método e do comportamento da curva da equação nas proximidades da raiz.

Cálculo Numérico – **Newton-Raphson**

- **Considerações Iniciais**
  - **Método do *Ponto Fixo* (*MPF*)**
    - **Uma das condições de convergência é que $|g'(x)| \leq M < 1, \forall x \in I$, onde I é um intervalo centrado na raiz**
    - **A convergência será tanto mais rápida quanto menor for $|g'(x)|$**
  - **O método de *Newton* busca garantir e acelerar a convergência do *MPF***
    - **Escolha de $g(x)$, tal que $g'(\xi) = 0$, como *função de iteração***

Cálculo Numérico – **Newton-Raphson**

- **Considerações Iniciais**
  - **Dada a equação $f(x) = 0$ e partindo da forma geral para $g(x)$**

$$g(x) = x + A(x)f(x)$$

  - **Busca-se obter a função $A(x)$ tal que $g'(\xi) = 0$**

$$g(x) = x + A(x)f(x) \Rightarrow$$
$$g'(x) = 1 + A'(x)f(x) + A(x)f'(x) \Rightarrow$$
$$g'(\xi) = 1 + A'(\xi)f(\xi) + A(\xi)f'(\xi) \Rightarrow$$
$$g'(\xi) = 1 + A(\xi)f'(\xi)$$

Cálculo Numérico – **Newton-Raphson**

- **Considerações Iniciais**
  - **Assim**

    $$g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow 1 + A(\xi)f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow A(\xi) = -1/f'(\xi)$$

    donde se toma $A(x) = -1/f'(x)$

  - **Então, dada** $f(x)$**, a função de iteração** $g(x) = x - f(x)/f'(x)$ **será tal que** $g'(\xi) = 0$**, posto que**

    $$g'(x) = 1 - \{[f'(x)]^2 - f(x)f''(x)\}/[f'(x)]^2$$

    e, como $f(\xi) = 0$**,** $g'(\xi) = 0$ **(desde que** $f'(\xi) \neq 0$ **)**

Cálculo Numérico – **Newton-Raphson**

- **Considerações Iniciais**
  - **Deste modo, escolhido x_0 , a seqüência $\{x_k\}$ será determinada por**

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} ,$$

onde $k = 0, 1, 2, \ldots$

- **Motivação Geométrica**
  - **Dado o ponto (x_k , $f(x_k)$)**
    - **Traça-se a reta $L_k(x)$ tangente à curva neste ponto:**

      $$L_k(x) = f(x_k) + f'(x_k)(x-x_k)$$

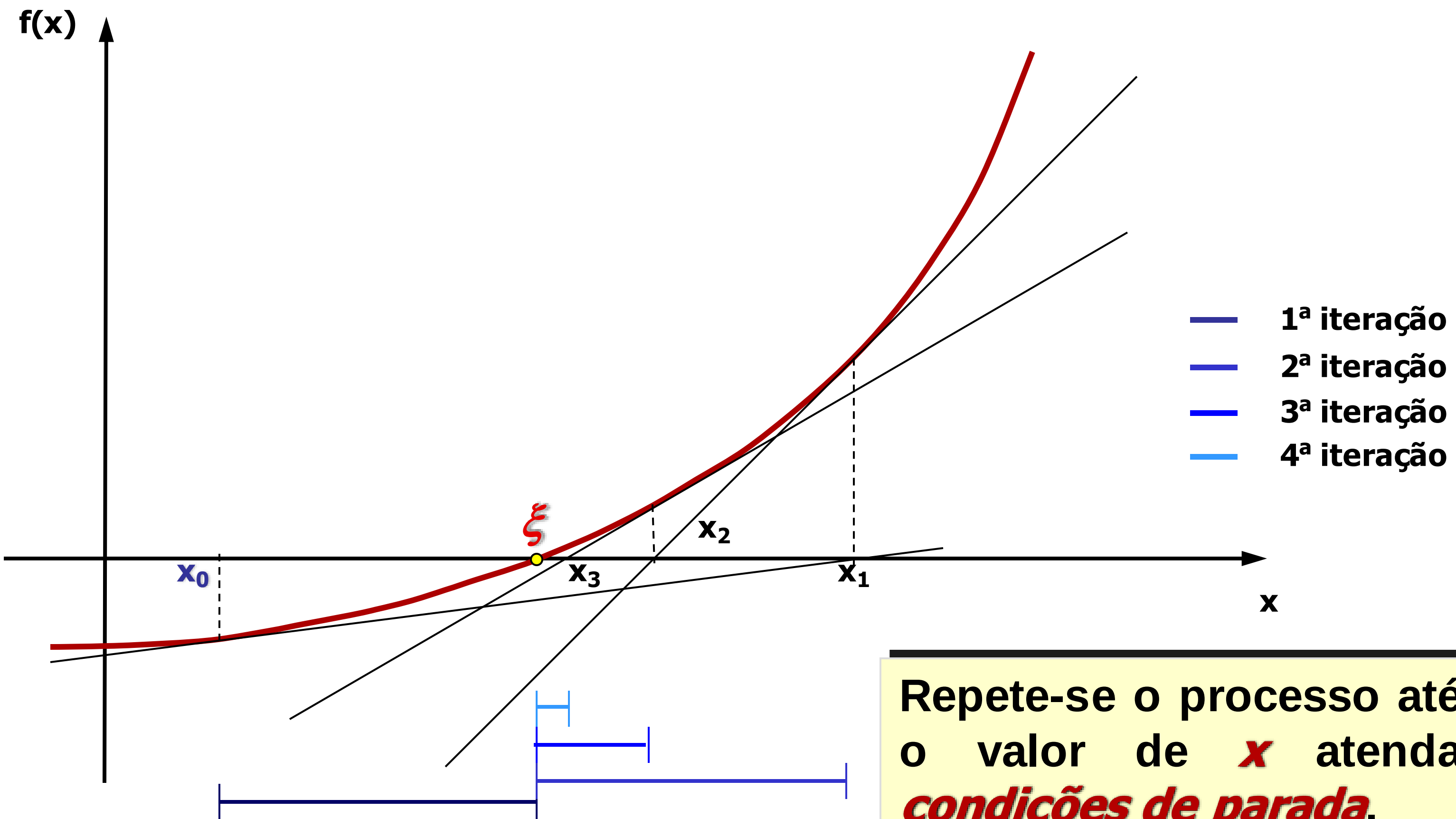
    - **Determina-se o zero de $L_k(x)$, um modelo linear que aproxima $f(x)$ em uma vizinhança x_k**

      $$L_k(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_k - f(x_k)/f'(x_k)$$

    - **Faz-se $x_{k+1} = x$**

Cálculo Numérico – **Newton-Raphson**

- **Análise Gráfica**



Repete-se o processo até que o valor de *x* atenda às *condições de parada*.

- **Estudo da Convergência**

TEOREMA 3:

Sendo $f(x)$, $f'(x)$ e $f''(x)$ contínuas em um intervalo I que contém uma raiz $x = \xi$ de $f(x) = 0$ e supondo $f'(\xi) \neq 0$, existirá um intervalo $\bar{I} \subseteq I$ contendo a raiz ξ, tal que se $x_0 \in \bar{I}$, a seqüência $\{x_k\}$ gerada pela fórmula recursiva

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

convergirá para a raiz.

Cálculo Numérico – **Newton-Raphson**

- **Testes de Parada**
  - **A cada iteração, testa-se se a aproximação encontrada poderá ser considerada como a solução do problema.**
    - $|f(x_k)| \leq \textit{tolerância}$
    - $|((x_{k+1} - x_k)/x_{k+1})| \leq \textit{tolerância}$

Cálculo Numérico – **Newton-Raphson**

Algoritmo

$k := 0$; $x_0 := x$;

while critério de interrupção não satisfeito and $k \leq L$

$k := k + 1$;

$x_{k+1} := x_k - f(x_k)/f'(x_k)$

endwhile

Cálculo Numérico – **Newton-Raphson**

Exemplo 17: No Exemplo 13, no qual $x^2 + x - 6 = 0$ **:**

- **Seja a raiz** $\xi_2 = 2$ **e** $x_0 = 1{,}5$
- **Assim:**
  - $g(x) = x - f(x)/f'(x) = x - (x^2 + x - 6)/(2x + 1)$
  - $x_1 = g(x_0) = 1{,}5 - (1{,}5^2 + 1{,}5 - 6)/(2.1{,}5 + 1)$
    $x_1 = 2{,}062500000$
  - $x_2 = g(x_1) = 2{,}000762195$
  - $x_3 = g(x_2) = 2{,}000000116$

$\vdots$

Exemplo 17: Comentários:

- **A parada poderá ocorrer na 3ª iteração (*x = 2,000000116*), caso a precisão do cálculo com 6 casas decimais for satisfatória para o contexto do trabalho**

- **Observe-se que no *Exemplo 10*, no *Método do Ponto Fixo* com $g(x) = \sqrt{6 - x}$ só veio a produzir $x = 2{,}000476818$ na 5ª iteração**

Cálculo Numérico – **Newton-Raphson**

Exemplo 18: Considere-se a função $f(x) = x^3 - x - 1$, e $tol = 0{,}002$ cujos zeros encontram-se nos intervalos:

$$\xi_1 \in I_1 = (-1, 0), \quad \xi_2 \in I_2 = (1, 2)$$

- **Seja $x_0 = 1$**
- $x_{k+1} = x_k - f(x_k)/f'(x_k)$
- **e** $g(x) = x - (x^3 - x - 1)/(3x^2 - 1)$

Cálculo Numérico – **Newton-Raphson**

Exemplo 18:

- **Cálculo da 1ª aproximação**

$$g(x_0) = 1 - \frac{[\,(1)^3 - 1\ - 1\,]}{[\,3*(1)^2 - 1\,]} = 1{,}5$$

- **Teste de Parada**
  - $|f(x_0)| = |\ 0{,}875\ | = 0{,}875 > \varepsilon$

Cálculo Numérico – **Newton-Raphson**

Exemplo 18:

- **Cálculo da 2ª aproximação**

$$g(x_1) = 1.5 - \frac{[\,(1.5)^3 - 1.5 - 1\,]}{[\,3*(1.5)^2 - 1\,]} = 1{,}3478261$$

- **Teste de Parada**
  - $|f(x_1)| = |\,0{,}100682\,| = 0{,}100682 > \varepsilon$

Exemplo 18:

- **Cálculo da 3ª aproximação**

$$g(x_2) = 1{,}3478261 - \frac{[\,(1{,}3478261)^3 - 1{,}3478261 - 1\,]}{[\,3*(1{,}3478261)^2 - 1\,]}$$

$$g(x_2) = 1{,}3252004$$

- **Teste de Parada**
  - $|f(x_2)| = |\,0{,}0020584\,| = 0{,}0020584 > \varepsilon$

Exemplo 18:

A seqüência $\{x_k\}$ gerada pelo método de Newton será:

Iteração	x	F(x)
1	1,5	0,875
2	1,3478261	0,1006822
3	1,3252004	0,0020584
4	1,3247182	$9{,}24378.10^{-7}$
5	1,3247178	$1{,}86517.10^{-13}$

$\varepsilon = 0{,}002$

Cálculo Numérico – **Newton-Raphson**

Vantagens:

- **Rapidez processo de convergência;**
- **Desempenho elevado.**

Cálculo Numérico – **Newton-Raphson**

Desvantagens:

- **Necessidade da obtenção de *f'(x)* , *o que pode ser impossível em determinados casos;***
- **O cálculo do valor numérico de *f'(x)* a cada iteração;**
- **Difícil implementação.**

Cálculo Numérico – **Secante**

- **Método da *Secante***

Dada uma função f(x) contínua no intervalo [a,b] onde existe uma raiz única, é possível determinar uma aproximação de tal raiz a partir da interseção da secante à curva em dois pontos x_0 e x_1 com o eixo das abscissas.

x_0 e x_1 - atribuídos em função da geometria do método e do comportamento da curva da equação nas proximidades da raiz.

Cálculo Numérico – **Secante**

- **Considerações Iniciais**
  - **Método de *Newton-Raphson***
    - **Um grande inconveniente é a necessidade da obtenção de $f'(x)$ e o cálculo de seu valor numérico a cada iteração**
  - **Forma de desvio do inconveniente**
    - **Substituição da derivada $f'(x_k)$ pelo quociente das diferenças**

$$f'(x_k) \approx [f(x_k) - f(x_{k-1})]/(x_k - x_{k-1})$$

onde x_{k-1} e x_k são duas aproximações para a raiz

Cálculo Numérico – **Secante**

- **Considerações Iniciais**
  - **A função de iteração será**

$$g(x) = x_k - f(x_k)/[(f(x_k) - f(x_{k-1}))/(x_k - x_{k-1})]$$

$$= (x_k - x_{k-1}) \,.\, f(x_k)/[f(x_k) - f(x_{k-1})]$$

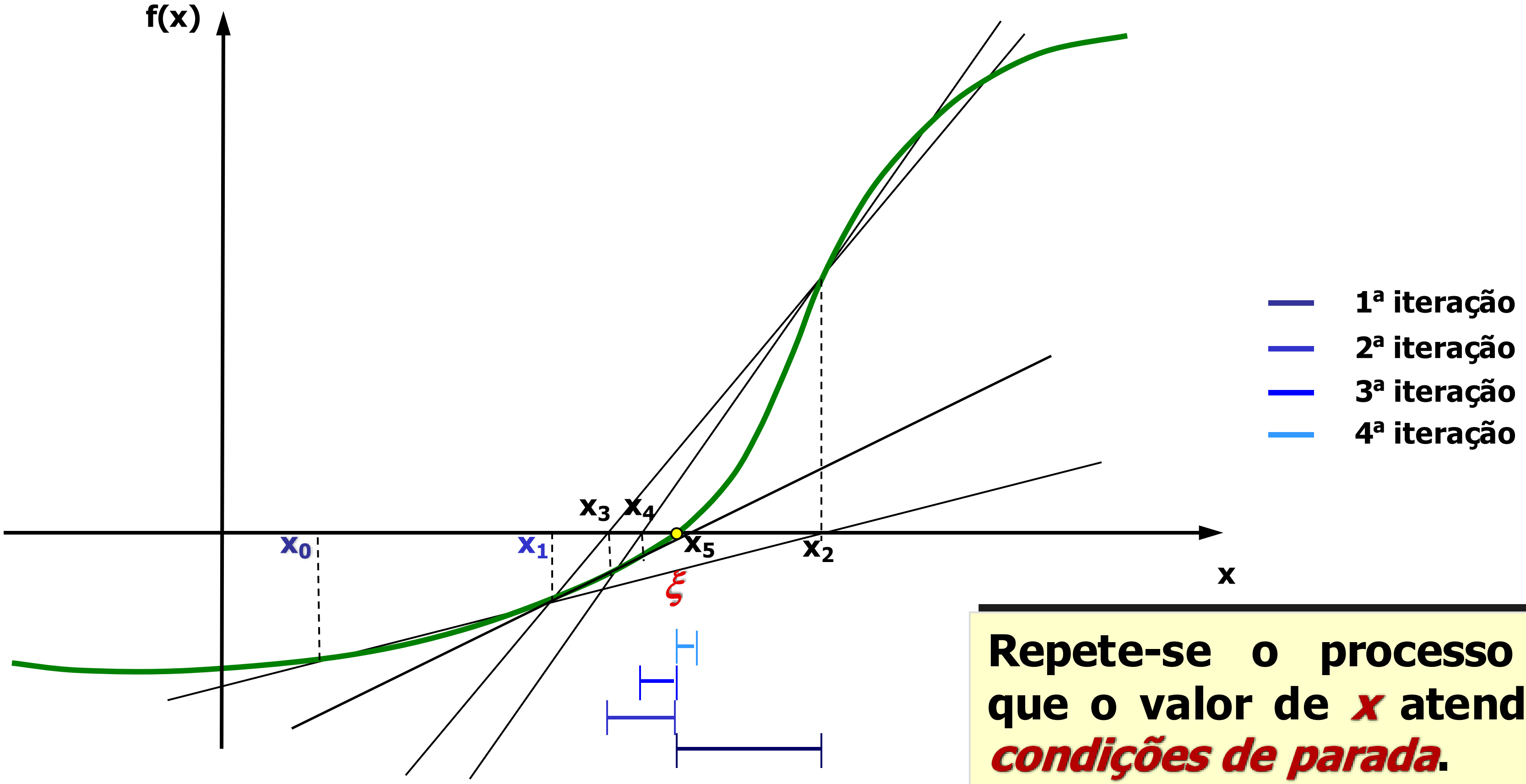
$$= [x_{k-1} . f(x_k) - x_k . f(x_{k-1})]/[f(x_k) - f(x_{k-1})]$$

$$g(x) = \frac{[x_{k-1}.f(x_k) - x_k.f(x_{k-1})]}{[f(x_k) - f(x_{k-1})]}$$

- **Interpretação Geométrica**
  - **A partir de duas aproximações x_{k-1} e x_k**
    - **Obtém-se o ponto x_{k+1} como sendo a abscissa do ponto de intersecção do eixo $\overrightarrow{ox}$ e da reta que passa pelos pontos (x_{k-1} , $f(x_{k-1})$) e (x_k , $f(x_k)$) (secante à curva da função)**

Cálculo Numérico – **Secante**

- **Análise Gráfica**



Repete-se o processo até que o valor de *x* atenda às *condições de parada*.

Cálculo Numérico – **Secante**

- **Testes de Parada**
  - **A cada iteração, testa-se se a aproximação encontrada poderá ser considerada como a solução do problema.**
    - $|f(x_k)| \leq \varepsilon$
    - $|((x_{k+1} - x_k)/x_{k+1})| \leq \varepsilon$

Cálculo Numérico – **Secante**

Algoritmo

$k := 0;\ x_0 := X_0;\ x_1 := X_1$

while ***critério de interrupção não satisfeito*** ***and*** $k \leq L$

$k := k + 1;$

$x_{k+1} := (x_{k-1} * f(x_k) - x_k * f(x_{k-1})) / (f(x_k) - f(x_{k-1}))$

endwhile

Cálculo Numérico – **Secante**

Exemplo 19: Considere-se a função $f(x) = x^3 - x - 1$, e $\varepsilon = 0,002$ cujos zeros encontram-se nos intervalos:

- **Seja $x_{k-1} = 1,5$ e $x_k = 1,7$**
- $$g(x) = \frac{[x_{k-1} . f(x_k) - x_k . f(x_{k-1})]}{[f(x_k) - f(x_{k-1})]}$$

Cálculo Numérico – **Secante**

Exemplo 19:

- **Cálculo da 1ª aproximação** $x_0 = 1{,}5 \quad x_1 = 1{,}7$

  $f(x_0) = 0{,}875 > 0$

  $f(x_1) = 2{,}213 > 0$

  $$x_2 = \frac{[1{,}5.(2{,}213) - 1{,}7.(0{,}875)]}{[2{,}213 - (0{,}875)]} = 1{,}36921$$

- **Teste de Parada**
  - $|f(x_2)| = |0{,}19769| = 0{,}19769 > \varepsilon$
  - **Escolha do Novo Intervalo**
    - $x_1 = 1{,}36921$ e $x_2 = 1{,}5$

Cálculo Numérico – **Secante**

Exemplo 19:

- **Cálculo da 2ª aproximação: x_1 = 1,36921 e x_2 = 1,5**

$$f(x_1) = 0{,}19769 > 0$$

$$f(x_2) = 0{,}875 > 0$$

$$x_3 = \frac{[1{,}36921.(0{,}875) - 1{,}5.(0{,}19769)]}{[0{,}875 - (0{,}19769)]} \Rightarrow$$

$$x_3 = 1{,}33104$$

Cálculo Numérico – **Secante**

Exemplo 19:

- **Cálculo da 2ª aproximação: x_1 = 1,36921 e x_2 = 1,5**
  - **Teste de Parada**
    - $|f(x_3)| = |0{,}02712| = 0{,}02712 > \varepsilon$
  - **Escolha do Novo Intervalo**
    - x_2 = 1,33104 e x_3 = 1,36921

Cálculo Numérico – **Secante**

Exemplo 19:

- **Cálculo da 3ª aproximação: $x_2 = 1{,}33104$ e $x_3 = 1{,}36921$**

$$f(x_2) = 0{,}02712 > 0$$

$$f(x_3) = 0{,}19769 > 0$$

$$x_4 = \frac{[1{,}33104.(0{,}19769) - 1{,}36921.(0{,}02712)]}{[0{,}19769 - (0{,}02712)]}$$

$$x_4 = 1{,}324971$$

Cálculo Numérico – **Secante**

Exemplo 19:

- **Cálculo da 3ª aproximação: x_2 = 1,33104 e x_3 = 1,36921**
  - **Teste de Parada**
    - **$|f(x_4)| = |0{,}00108| = 0{,}00108 < \varepsilon$**

      (*valor aceitável para a raiz*)

Cálculo Numérico – **Secante**

Exemplo 20: Resgatando o Exemplo 13, no qual $x^2 + x - 6 = 0$:

- **Sejam $x_0 = 1{,}5$ e $x_1 = 1{,}7$**
- **Assim:**
  - $x_2 = [x_0 . f(x_1) - x_1 . f(x_0)]/[f(x_1) - f(x_0)]$
    $= [1{,}5.(-1{,}41) - 1{,}7.(2{,}25)]/(-1{,}41 + 2{,}25)$
    $= 2{,}03571$
  - $x_3 = [x_1 . f(x_2) - x_2 . f(x_1)]/[f(x_2) - f(x_1)]$
    $= 1{,}99774$

Cálculo Numérico – **Secante**

Exemplo 20: Resgatando o Exemplo 13, no qual $x^2 + x - 6 = 0$:

- **Assim:**
  - $x_4 = [x_2 \cdot f(x_3) - x_3 \cdot f(x_2)]/[f(x_3) - f(x_2)]$
    $= 1{,}99999$

    $\vdots$

- **Comentários:**
  - **A parada poderá ocorrer na 3ª iteração ($x = 1{,}99999$), caso a precisão do cálculo com 5 casas decimais for satisfatória para o contexto do trabalho**

Cálculo Numérico – **Secante**

Vantagens:

- **Rapidez processo de convergência;**
- **Cálculos mais convenientes que do método de Newton;**
- **Desempenho elevado.**

Cálculo Numérico – **Secante**

Desvantagens:

- **Se o cálculo *f'(x)* não for difícil, então o método logo será substituído pelo de Newton-Raphson;**
- **Se o gráfico da função for paralela a um dos eixos e/ou tangencia o eixo das abscissas em um ou mais pontos, logo não se deve usar o método da *Secante*;**
- **Difícil implementação.**