Análise Numérica

Renato Martins Assunção

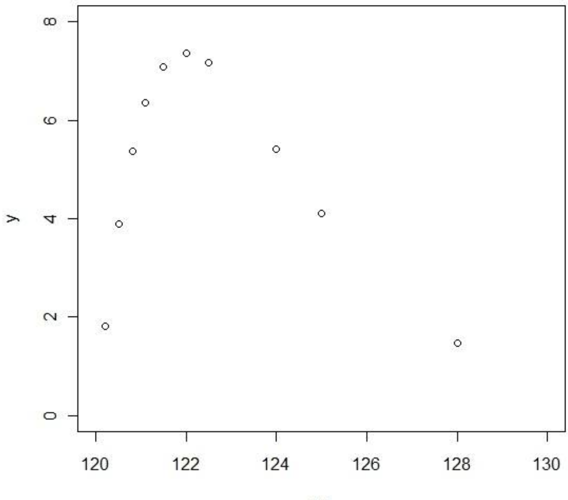
DCC - UFMG

2012

O que é interpolação

- Interpolar: inserir ou estimar um novo termo entre os termos de uma sequência.
- Basicamente, serve para estimar uma curva em pontos não observados.
- Vamos ver um exemplo:
  - Tecidos tingidos com corantes.
  - Interesse em saber como os fatores envolvidos na fabricação de corantes afetavam a resistência do tecido tingido.
  - Um dos fatores era $x =$ *temperatura, variando de 50 a 60 graus centígrados*.
  - Experimento com 10 níveis diferentes de temprer atura.
  - Em cada um mediu-se $y =$ resistência do tecido.

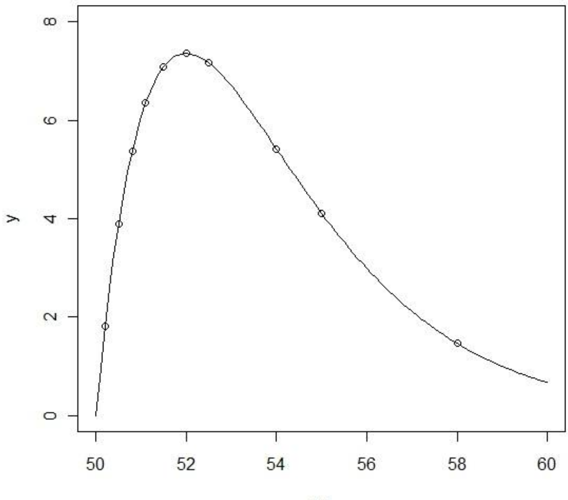
Resultado do experimento



Queremos mais

- Seja $y(x) =$ resistência do tecido quando corante é fabricado com temperatura x.
- Temos o valor $y(x)$ para 10 valores distintos de x.
- Deseja-se a curva $y(x)$ para todo x e não apenas para os 10 valores de x usados no experimento.

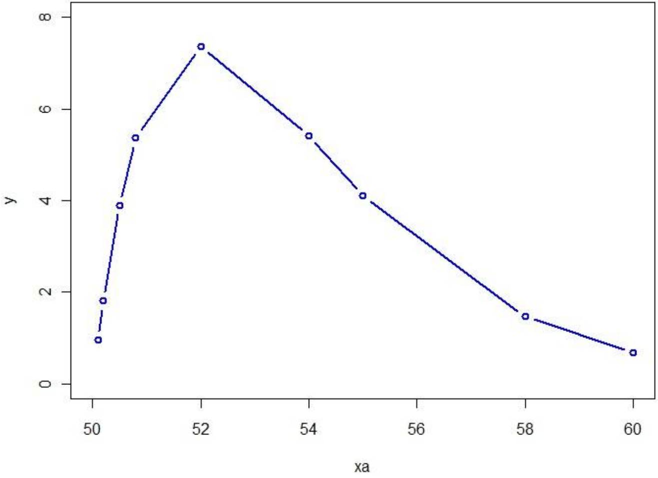
O que gostaríamos de ter



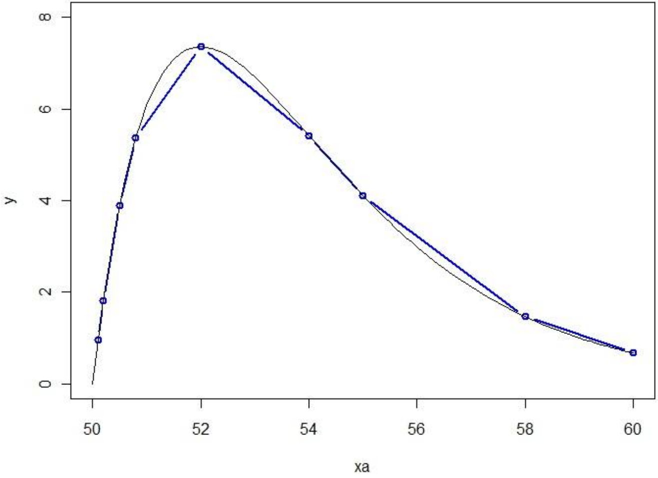
Como obter esta curva?

- Para obter a curva, podemos fazer mais experimentos com outros valores de temperatura.
- Implica em aumento de custo, mais tempo.
- E sempre haverão pontos x não testados.
- Podemos obter uma **APROXIMAÇÃO** para a curva $y(x)$ verdadeira fazendo uma interpolação entre os pontos conhecidos da curva.

Interpolação linear

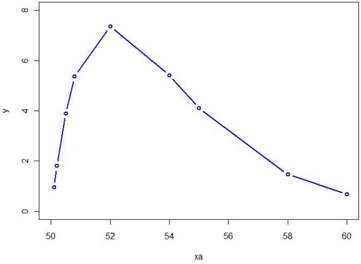


Temos apenas uma aproximação



Como é feita esta aproximação?

- Simplesmente conectamos os pontos sucessivos com segmentos de retas.



- Por exemplo, entre $x = 52$ e $x = 54$ temos $y(52) = 7.36$ e $y(54) = 5.41$.
- Então, entre $x = 52$ e $x = 54$, a curva $y(x)$ é aproximada pelo polinômio de grau 1 $P(x) = y(52) + m * (x - 52)$ onde $m = (y(54) - y(52))/(54 - 52)$.
- Isto é,

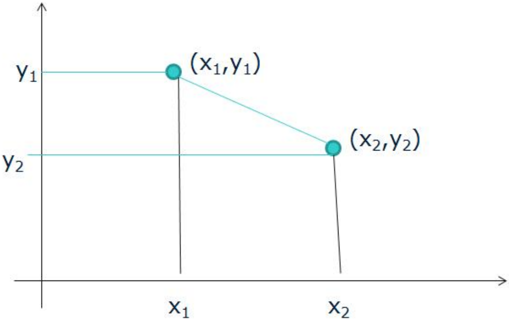
$$P(x) = 7.36 - 0.975 * (x - 52).$$

Lembrando

- Equação de linha reta passando por (x_1, y_1) e (x_2, y_2) com $x_1 \neq x_2$ pode ser escrita como

$$y = a + m * (x - x_1)$$

- Inclinação: $m = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$.
- Quando $x = x_1$, reta deve ser $= y1 \to a = y1$.



Outra forma

- Polinômio $P(x) = a_0 + a_1 x$ deve passar por (x_1, y_1) e (x_2, y_2).
- Então devemos ter as seguintes equações satisfeitas:
  - $y_1 = P(x_1) = a_0 + a_1 x_1$
  - $y_2 = P(x_2) = a_0 + a_1 x_2$
- Para obter os coeficientes a_0 e a_1 devemos resolver o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1a_0 + x_1 a_1 \\ 1a_0 + x_2 a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix}$$

- Isto é

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \Rightarrow P(x) = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

Polinômios interpolantes

- Por que não interpolar usando uma função menos rígida que segmentos de reta?
- Talvez um polinômio que passe suavemente pelos pontos obervados forneça uma aproximação melhor.
- Como obter um polinômio deste tipo?

Alguns fatos sobre polimônios

- Polinômio $P(x)$ de grau n

$$P(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$$

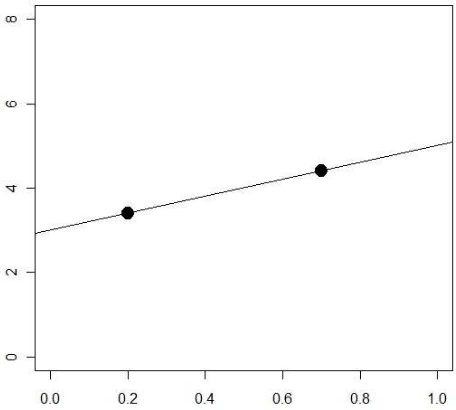
onde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ são constantes reais (coeficientes do polinômio).

- Devemos ter $a_n \neq 0$ para que o termo x_n apareça e o polinômio seja de grau n.
- Uma raiz de um polinômio é um valor r (real ou complexo) tal que $P(r) = 0$.
- Todo polinômio de grau n possui exatamente n raízes (reais ou complexas).
- Todo polinômio de grau n pode ser escrito da seguinte forma: $P(x) = a_n(x - r_1) * \ldots * (x - r_n)$ onde $r_1, \ldots, r_n$ são as raízes (reais ou complexas) de $P(x)$.

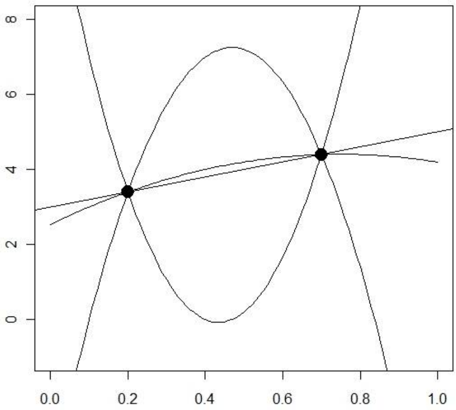
Polinômios passando por pontos

- Retas: polinômios de grau 1
- Parábolas: polinômios de grau 2
- Dois pontos num plano:
    - Uma e somente uma reta (polinômio de grau 1) passa por dois pontos distintos no plano.
    - Infinitas parábolas (polinômios de segundo grau) passam por dois pontos.

Dois pontos ⇒ Uma reta

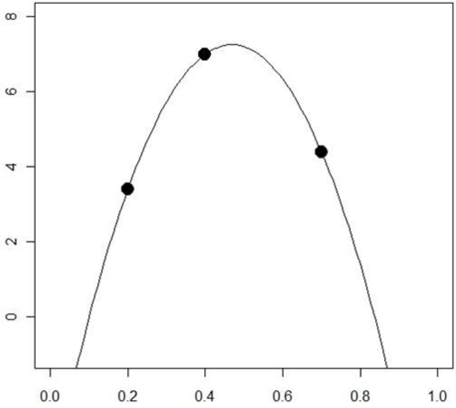


Dois pontos $\Rightarrow$ infinitas parábolas



Três pontos não-colineares

- Uma, e somente uma, parábola (polinômio de segundo grau) passa por estes 3 pontos.



Generalização

- Dados n pontos no plano, com coordenadas horizontais $x_1, \ldots, x_n$ distintas, existe um, e apenas um, polinômio de grau $n-1$ que passa por eles.
- Existem infinitos polinômios de grau maior que $n-1$ que passam pelos pontos.
- Tipicamente, não haverá polinômio de grau $< n-1$ passando pelos pontos (a exceção é quando eles estiverem numa disposição muito especial: colineares no caso de n=3, por exemplo).

Poliômios interpolantes

- Como obter este único polinômio de grau $n-1$ que passa pelos n pontos $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$?
- Vamos começar com 3 pontos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$
  - $y_1 = P(x_1) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2$
  - $y_2 = P(x_2) = a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2$
  - $y_3 = P(x_3) = a_0 + a_1 x_3 + a_2 x_3^2$
- Isto implica num sistema linear de 3 equações e 3 incógnitas:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

- Uma matriz com este formato especial é chamada de matriz de **Vandermonde**.

Caso geral

- Com n pontos $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$, devemos satisfazer simultaneamente as seguintes equações:
    - $y_1 = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \ldots + a_{n-1} x_1^{n-1}$
    - $y_2 = a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + \ldots + a_{n-1} x_2^{n-1}$
    - $\ldots$
    - $y_n = a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \ldots + a_{n-1} x_n^{n-1}$
- Isto implica num sistema linear de n equações e n incógnitas:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

- Uma matriz com este formato especial é chamada de matriz de **Vandermonde**.

Fatos sobre polinômios

- Soma de polinômios ainda é um polinômio: $P(x) + Q(x)$
- Grau de $P(x) + Q(x) = \max\{\mathrm{grau}(P(x)), \mathrm{grau}(Q(x))\}$
- Quando o grau pode ser $<$?
- Uma, e só uma, reta passa por dois pontos.

Polinômios de Lagrange

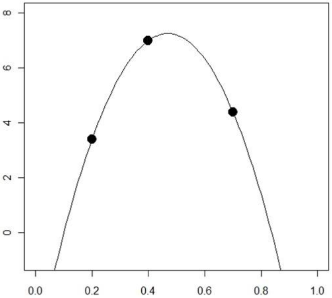
- Esta solução geral através da matriz de Vandermonde não é numericamente estável: a matriz de Vandermonde tem número de condição muito grande e pode gerar soluções com erros de arrendondamento muito grandes se o sistema for grande.
- Lagrange escreveu este polinômio geral que passa por n pontos de uma forma que é numericamente mais estável.
- Para entender seu raciocínio, vamos considerar um polinômio de grau $n-1$ que distingue o primeiro ponto:

$$P_1(x) = \frac{(x-x_2)(x-x_3)\dots(x-x_n)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\dots(x_1-x_n)} y_1.$$

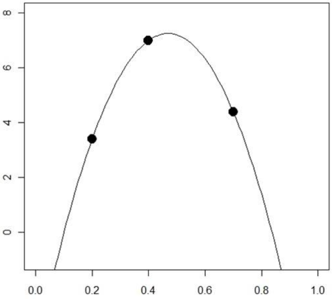
- Para ficar menos abstrato, vamos imaginar que temos apenas 3 pontos:
    - $(x_1, y_1) = (0.2, 3.4)$
    - $(x_2, y_2) = (0.4, 7.0)$
    - $(x_3, y_3) = (0.7, 4.4)$

Já sabemos que existe apenas uma única parábola passando por três pontos.

$$
\begin{aligned}
P_1(x) &= \frac{(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} y_1 \\
&= \frac{(x - 0.4)(x - 0.7)}{(0.2 - 0.4)(0.2 - 0.7)} * 3.4
\end{aligned}
$$



- $(x_1, y_1) = (0.2, 3.4)$
- $(x_2, y_2) = (0.4, 7.0)$
- $(x_3, y_3) = (0.7, 4.4)$



$$\begin{aligned} P_1(x) &= \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} y_1 \\ &= \frac{(x-0.4)(x-0.7)}{(0.2-0.4)(0.2-0.7)} * 3.4 \end{aligned}$$

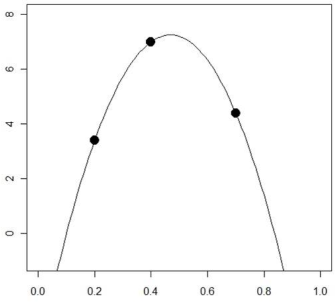
- Veja que $P_1(x)$ é um polinômio de grau $n-1=2$.
- Além disso, ele vale zero quando $x = x2 = 0.4$ e quando $x = x3 = 0.7$ (isto é, $P_1(0.4) = P_1(0.7) = 0$).
- No ponto $x = x_1 = 0.2$, a fração vira 1 e $P_1(0.2) = y_1 = 3.4$.
- Assim, $P_1(x)$ é uma parábola que passa em $(x_1, y_1) = (0.2, 3.4)$ e que passa em $(x_2, 0) = (0.4, 0)$ e em $(x_3, 0) = (0.7, 0) \rightarrow$ não é o que desejamos!!

Ainda com os três pontos:

- $(x_1, y_1) = (0.2, 3.4)$
- $(x_2, y_2) = (0.4, 7.0)$
- $(x_3, y_3) = (0.7, 4.4)$

Vamos considerar o polinômio que distingue o segundo ponto

$$\begin{aligned} P_2(x) &= \frac{(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} y_2 \\ &= \frac{(x - 0.2)(x - 0.7)}{(0.4 - 0.2)(0.4 - 0.7)} * 7.0 \end{aligned}$$



- $P_2(x)$ é um polinômio de grau $n - 1 = 2$, vale zero quando $x = x_1 = 0.2$ e $x = x_3 = 0.7$ (isto é, $P_2(0.2) = P_2(0.7) = 0$).
- No ponto $x = x_2 = 0.4$, a fração vira 1 e $P_2(0.4) = y_2 = 7.0$.
- Assim, $P_2(x)$ é uma parábola que passa em $(x_2, y_2) = (0.4, 7.0)$ e que passa em $(x_1, 0) = (0.2, 0)$ e em $(x_3, 0) = (0.7, 0)$.

- Repetimos este procedimento com o terceiro ponto obtendo um terceiro polinômio $P_3(x)$ de grau 2.
- Juntamos tudo agora somando os três polinômios de grau 2:
- $P(x) = P_1(x) + P_2(x) + P_3(x)$
- $P(x)$ é um polinômio de grau 2 tal que:

$$\begin{aligned}
P(x_1) &= P_1(x_1) + P_2(x_1) + P_3(x_1) = y_1 + 0 + 0 = y_1 \\
P(x_2) &= P_1(x_2) + P_2(x_2) + P_3(x_2) = 0 + y_2 + 0 = y_2 \\
P(x_3) &= P_1(x_3) + P_2(x_3) + P_3(x_3) = 0 + 0 + y_3 = y_3
\end{aligned}$$

- Como existe apenas um único polinômio de grau 2 que passa por estes três pontos, nós encontramos este único polinômio: é $P(x) = P_1(x) + P_2(x) + P_3(x)$.

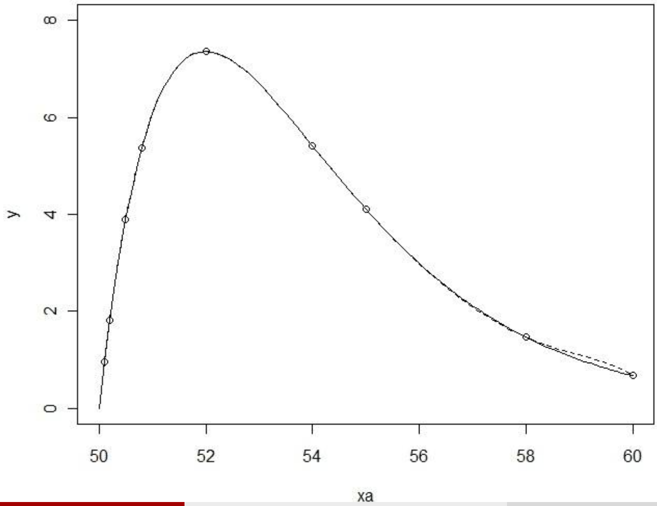
Polinômios de Lagrange

- $(x_1, y_1) = (0.2, 3.4)$
- $(x_2, y_2) = (0.4, 7.0)$
- $(x_3, y_3) = (0.7, 4.4)$
- Isto é, o polinômio interpolante é dado por

$$\begin{aligned} P(x) &= P_1(x) + P_2(x) + P_3(x) \\ &= \left[\frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} y_1\right] + \left[\frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} y_2\right] + \left[\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)} y_3\right] \\ &= \left[\frac{(x-0.4)(x-0.7)}{(0.2-0.4)(0.2-0.7)} * 3.4\right] + \left[\frac{(x-0.2)(x-0.7)}{(0.4-0.2)(0.4-0.7)} * 7.0\right] + \left[\frac{(x-0.2)(x-0.4)}{(0.7-0.2)(0.7-0.4)} * 4.4\right] \end{aligned}$$

- A fórmula geral é: $\boxed{P(x) = \sum_{i=1}^{n} P_i(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i \prod_{j=1; j\neq i}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}}$

Exemplo



Lagrange - pros e cons

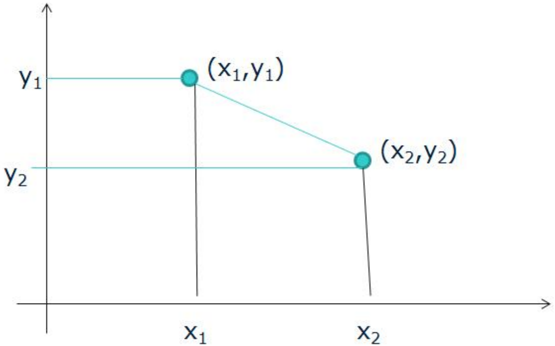
- Monômios: $p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ resulta em mau condicionamento.
- Monômios: mas avaliar a interpolação monomial é barata.
- Lagrange: muito bem comportado mas avaliar a interpolação de Lagrange é caro (cada $P_i(x)$ é um polinômio de grau $n - 1$ e a soma $P(x)$ não é facilmente reduzida a um polinômio usual).

Polinômios de Newton

- Um polinômio $p_n(x)$ com grau n baseado em $n+1$ pontos.
- Um novo ponto é observado. Como atualizar $p_n(x)$ passando a $p_{n+1}(x)$?
- Não queremos recalcular todos os valores...
- É possível fazer isto?
- Sim: **polinômios de Newton**.

Começando com 2 pontos

- Equação de linha reta passando por (x_0, y_0) e (x_1, y_1) com $x_1 \neq x_0$
- $y = a_0 + a_1 * (x - x_0)$.
- Inclinação: $a_1 = (y_1 - y_0)/(x_1 - x_0)$.
- Quando $x = x_0$, reta deve ser $= y_0 \Rightarrow a = y_0$.
- Assim, equação é $p_1(x) = y_0 + \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} * (x - x_0)$.



Passando por 3 pontos

- Temos $p_1(x) = a_0 + a_1 * (x - x_0)$
- Um novo ponto entra: (x_2, y_2).
- Como obter o polinômio que passa pelos 3 pontos?
- Se reescrevermos este polinômio desta forma:

$$p_2(x) = a_0^* + a_1^*(x - x_0) + a_2^*(x - x_0)(x - x_1) ,$$

- o problema fica muito fácil: tome $a_0^* = a_0$ e $a_1^* = a_1$.
- Isto é, os **MESMOS DE ANTES** (os mesmos de $p_1(x)$).
- Neste caso, $a_0^* = y_0$ e $a_1^* = (y_1 - y_0)/(x_1 - x_0)$ e portanto

$$p_2(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) + a_2^*(x - x_0)(x - x_1) ,$$

- Resta apenas obter a_2^* e este também é muito simples como veremos a seguir.

Três pontos

- Considere os dados

x_0	x_1	x_2
y_0	y_1	y_2

- Queremos encontrar a_0, a_1, e a_2 no seguinte polinômio tal que este se ajuste aos dados:

$$p_2(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1)$$

- Combinando os dados obtemos três equações para determinar nossos três a_i desconhecidos:

$$\begin{aligned}
\text{em } x_0 \quad &: y_0 = a_0 + 0 + 0 \\
\text{em } x_1 \quad &: y_1 = a_0 + a_1(x_1 - x_0) + 0 \\
\text{em } x_2 \quad &: y_2 = a_0 + a_1(x_1 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)
\end{aligned}$$

Três pontos

- Ou em forma matricial

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & x_1 - x_0 & 0 \\ 1 & x_2 - x_0 & (x_2 - x_0)(x_2 - x_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ Triangular inferior.

$\Rightarrow$ Somente $\mathcal{O}(n^2)$ operações.

Três pontos

- Utilizando Substituição *Forward* para resolver este sistema triangular inferior obtemos:

$$
\begin{aligned}
a_0 &= y_0 = f(x_0) \\
a_1 &= \frac{y_1 - a_0}{x_1 - x_0} \\
&= \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \\
a_2 &= \frac{y_2 - a_0 - (x_2 - x_0)a_1}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_0)} \\
&= \frac{f(x_2) - f(x_0) - (x_2 - x_0)\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_0)} \\
&= \frac{\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}
\end{aligned}
$$

Polinômios de Newton

- Polinômios de Newton são da forma

$$p_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \dots$$

- A base usada é então

função	ordem
1	0
$x - x_0$	1
$(x - x_0)(x - x_1)$	2
$(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$	3

- Lagrange e Newton acham O MESMO polinômio, apenas expressam e calculam de forma diferente.
- O cálculo de Newton é estável numericamente (como Lagrange) mas é computacionalmente mais eficiente que Lagrange (menos operações).

De volta aos três pontos

- A partir do exemplo com 3 pontos, vemos um padrão. Existem muitos termos da forma

$$\frac{f(x_j) - f(x_i)}{x_j - x_i}$$

- Estes são chamados de *diferenças divididas* e são denotados com colchetes

$$f[x_i, x_j] = \frac{f(x_j) - f(x_i)}{x_j - x_i}$$

- Aplicá-los aos nossos resultados:

$$\begin{aligned} a_0 &= y_0 = f[x_0] \\ a_1 &= f[x_0, x_1] \\ a_2 &= \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} \\ &= f[x_0, x_1, x_2] \end{aligned}$$

Exemplo

- Para os dados

x	1	-4	0
y	3	13	-23

- Encontre o polinômio de interpolação de segunda ordem usando Newton.
- Sabemos que

$$p_1(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1)$$

E que

$$\begin{aligned}
a_0 &= f[x_0] = f[1] = f(1) = 3 \\
a_1 &= f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{13 - 3}{-4 - 1} = -2 \\
a_2 &= f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} \\
&= \frac{\frac{-23-13}{0--4} - \frac{13-3}{-4-1}}{0 - 1} \\
&= \frac{-9 + 2}{-1} = 7
\end{aligned}$$

Então

$$p_1(x) = 3 - 2(x - 1) + 7(x - -1)(x + 4)$$

Diferenças divididas

Propriedade Recursiva

$$f[x_0, \ldots, x_k] = \frac{f[x_1, \ldots, x_k] - f[x_0, \ldots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}$$

- Com as duas primeiras definidas por

$$\begin{aligned} f[x_i] &= f(x_i) \\ f[x_i, x_j] &= \frac{f[x_j] - f[x_i]}{x_j - x_i} \end{aligned}$$

Não importa a ordem usada

Teorema da Invariância

$f[x_0, \ldots, x_k]$ é invariante sob todas permutações dos argumentos $x_0, \ldots, x_k$.

- "Prova" simples: $f[x_0, x_1, \ldots, x_k]$ é o coeficiente do termo x^k no polinômio de interpolação f em $x_0, \ldots, x_k$. Mas qualquer permutação do x_i ainda fornece o mesmo polinômio.
- Isto diz que também podemos escrever

$$f[x_i, \ldots, x_j] = \frac{f[x_{i+1}, \ldots, x_j] - f[x_i, \ldots, x_{j-1}]}{x_j - x_i}.$$

O jeito fácil: tabelas

- Podemos calcular as diferenças divididas de maneira muito mais simples usando tabelas. Para construir a tabela de diferença dividida para $f(x)$ para o $x_0, \ldots, x_3$

x	$f[\cdot]$	$f[\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot,\cdot]$
x_0	$f[x_0]$			
		$f[x_0,x_1]$		
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0,x_1,x_2]$	
		$f[x_1,x_2]$		$f[x_0,x_1,x_2,x_3]$
x_2	$f[x_2]$		$f[x_1,x_2,x_3]$	
		$f[x_2,x_3]$		
x_3	$f[x_3]$			

O jeito fácil: tabelas

- Passo 1: calcule $f[x_0, x_1]$

x	$f[\cdot]$	$f[\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot,\cdot]$
x_0	$f[x_0]$			
		$f[x_0, x_1]$		
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0, x_1, x_2]$	
		$f[x_1, x_2]$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$
x_2	$f[x_2]$		$f[x_1, x_2, x_3]$	
		$f[x_2, x_3]$		
x_3	$f[x_3]$			

O jeito fácil: tabelas

- Passo 2: calcule $f[x_1, x_2]$

x	$f[\cdot]$	$f[\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot,\cdot]$
x_0	$f[x_0]$			
		$f[x_0, x_1]$		
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0, x_1, x_2]$	
		$f[x_1, x_2]$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$
x_2	$f[x_2]$		$f[x_1, x_2, x_3]$	
		$f[x_2, x_3]$		
x_3	$f[x_3]$			

O jeito fácil: tabelas

- Passo 3: calcule $f[x_2, x_3]$

x	$f[\cdot]$	$f[\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot,\cdot]$
x_0	$f[x_0]$			
		$f[x_0, x_1]$		
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0, x_1, x_2]$	
		$f[x_1, x_2]$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$
x_2	$f[x_2]$		$f[x_1, x_2, x_3]$	
		$f[x_2, x_3]$		
x_3	$f[x_3]$			

O jeito fácil: tabelas

- Passo 4: calcule $f[x_0, x_1, x_2]$

x	$f[\cdot]$	$f[\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot,\cdot]$
x_0	$f[x_0]$			
		$f[x_0, x_1]$		
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0, x_1, x_2]$	
		$f[x_1, x_2]$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$
x_2	$f[x_2]$		$f[x_1, x_2, x_3]$	
		$f[x_2, x_3]$		
x_3	$f[x_3]$			

O jeito fácil: tabelas

- Passo 5: calcule $f[x_1, x_2, x_3]$

x	$f[\cdot]$	$f[\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot,\cdot]$
x_0	$f[x_0]$			
		$f[x_0, x_1]$		
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0, x_1, x_2]$	
		$f[x_1, x_2]$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$
x_2	$f[x_2]$		$f[x_1, x_2, x_3]$	
		$f[x_2, x_3]$		
x_3	$f[x_3]$			

O jeito fácil: tabelas

- Passo 6: calcule $f[x_0, x_1, x_2, x_3]$

x	$f[\cdot]$	$f[\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot,\cdot]$
x_0	$f[x_0]$			
		$f[x_0, x_1]$		
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0, x_1, x_2]$	
		$f[x_1, x_2]$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$
x_2	$f[x_2]$		$f[x_1, x_2, x_3]$	
		$f[x_2, x_3]$		
x_3	$f[x_3]$			

Exemplo com tabela

- Construa a tabela de diferenças divididas para os dados

x	1	$\frac{3}{2}$	0	2
y	3	$\frac{13}{4}$	3	$\frac{5}{3}$

e construa o polinômio de interpolação de maior ordem.

- Podemos calcular as diferenças divididas muito mais facilmente usando tabelas. Para construir a tabela de diferença dividida para $f(x)$ para o $x_0, \ldots, x_3$

x	$f[\cdot]$	$f[\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot,\cdot]$
1	3			
		$\frac{1}{2}$		
$\frac{3}{2}$	$\frac{13}{4}$		$\frac{1}{3}$	
		$\frac{1}{6}$		-2
0	3		$-\frac{5}{3}$	
		$-\frac{2}{3}$		
2	$\frac{5}{3}$			

Exemplo com tabela

- Passo 1:

x	$f[\cdot]$	$f[\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot,\cdot]$
1	3			
		$\frac{1}{2}$		
$\frac{3}{2}$	$\frac{13}{4}$		$\frac{1}{3}$	
		$\frac{1}{6}$		-2
0	3		$-\frac{5}{3}$	
		$-\frac{2}{3}$		
2	$\frac{5}{3}$			

- Passo 2:

x	$f[\cdot]$	$f[\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot,\cdot]$
1	3			
		$\frac{1}{2}$		
$\frac{3}{2}$	$\frac{13}{4}$		$\frac{1}{3}$	
		$\frac{1}{6}$		-2
0	3		$-\frac{5}{3}$	
		$-\frac{2}{3}$		
2	$\frac{5}{3}$			

Exemplo com tabela

- Passo 3:

x	$f[\cdot]$	$f[\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot,\cdot]$
1	3			
		$\frac{1}{2}$		
$\frac{3}{2}$	$\frac{13}{4}$		$\frac{1}{3}$	
		$\frac{1}{6}$		-2
0	3		$-\frac{5}{3}$	
		$-\frac{2}{3}$		
2	$\frac{5}{3}$			

- Passo 4:

x	$f[\cdot]$	$f[\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot,\cdot]$
1	3			
		$\frac{1}{2}$		
$\frac{3}{2}$	$\frac{13}{4}$		$\frac{1}{3}$	
		$\frac{1}{6}$		-2
0	3		$-\frac{5}{3}$	
		$-\frac{2}{3}$		
2	$\frac{5}{3}$			

Exemplo com tabela

- Passo 5:

x	$f[\cdot]$	$f[\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot,\cdot]$
1	3			
		$\frac{1}{2}$		
$\frac{3}{2}$	$\frac{13}{4}$		$\frac{1}{3}$	
		$\frac{1}{6}$		-2
0	3		$-\frac{5}{3}$	
		$-\frac{2}{3}$		
2	$\frac{5}{3}$			

- Passo 6:

x	$f[\cdot]$	$f[\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot,\cdot]$
1	3			
		$\frac{1}{2}$		
$\frac{3}{2}$	$\frac{13}{4}$		$\frac{1}{3}$	
		$\frac{1}{6}$		-2
0	3		$-\frac{5}{3}$	
		$-\frac{2}{3}$		
2	$\frac{5}{3}$			

Terminando o exemplo

x	$f[\cdot]$	$f[\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot,\cdot]$
1	3			
		$\frac{1}{2}$		
$\frac{3}{2}$	$\frac{13}{4}$		$\frac{1}{3}$	
		$\frac{1}{6}$		-2
0	3		$-\frac{5}{3}$	
		$-\frac{2}{3}$		
2	$\frac{5}{3}$			

Os coeficientes estão disponíveis prontamente e nós chegamos em

$$p_2(x) = 3 + \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{3}(x-1)\left(x - \frac{3}{2}\right) - 2(x-1)\left(x - \frac{3}{2}\right)x.$$

Cautela

- Polinômio de Lagrange é muito simples mas não é o fim da história.
- Infelizmente, o polinômio de Lagrange nem sempre fornece soluções satisfatórias.
- Quando a função que queremos aproximar possui oscilações, o polinômio pode apresentar oscilações muito maiores do que o é razoável supor que existe na função real.
- Isto é, o polinômio costuma apresentar oscilações muito acentuadas, especialmente nos extremos e se o seu grau é elevado.