Integração Numérica

- Do ponto de vista analítico, existem diversas regras que podem ser utilizadas na prática. Contudo, embora tenhamos resultados básicos e importantes para as técnicas de integração analítica, nem sempre podemos resolver todos os casos ou dizer que uma função simples terá uma primitiva também simples
- Por exemplo, $f(x) = 1/x$ é uma função algébrica racional e sua primitiva é a função $\ln(x)$ que é uma função transcendente

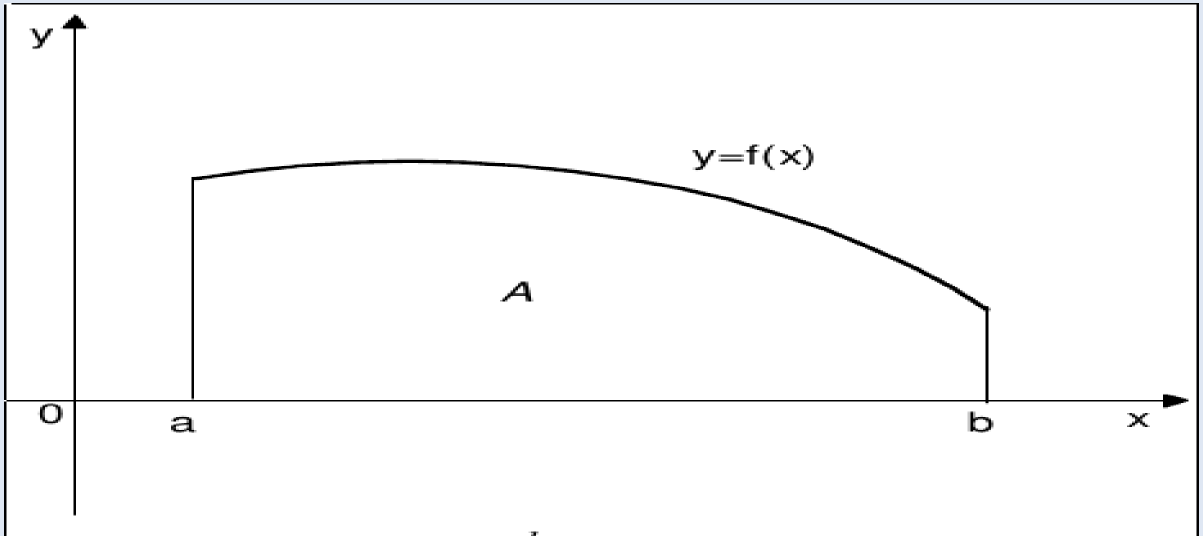
Integração Numérica

- Alguns casos só podem ser resolvidos através de métodos algorítmicos, como quando não possuímos a expressão analítica de f
- Queremos obter a solução numérica (chamada de quadratura) de uma integral simples de modo que:
  - Sendo f(x) uma função contínua em [a, b], existe uma primitiva neste intervalo e
  - F(x) é tal que $\int f(x)\,dx$ = F(x) + C, com F'(x) = f(x)

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Integração Numérica

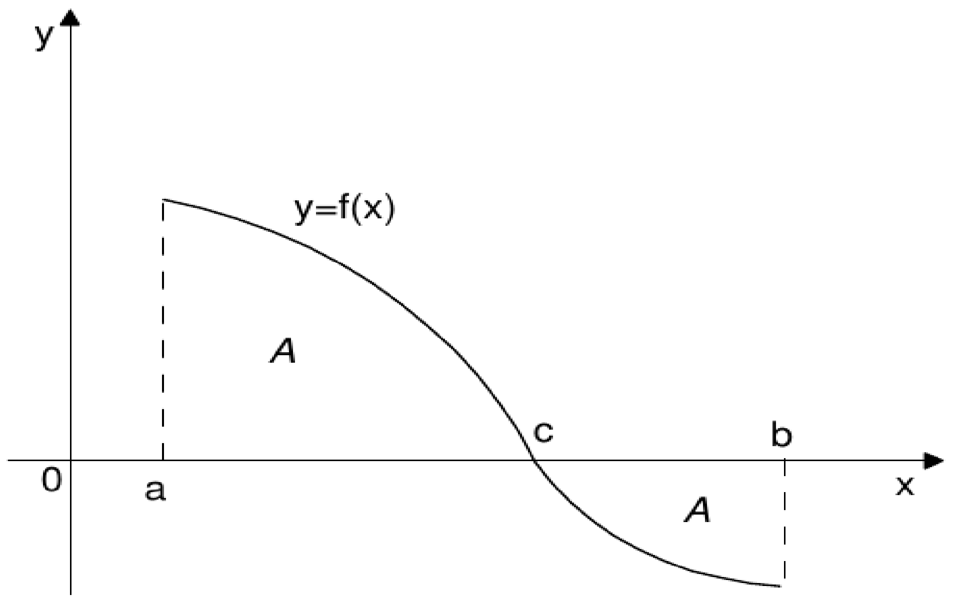
- Vale lembrar que, sendo f(x) não negativa em [a, b], $\int_a^b f(x)\,dx$ representa, numericamente, a área da figura delimitada por y = 0, x = a, x = b, y = f(x), como mostra a figura:



$$A = \int_a^b f(x)\,dx$$

Integração Numérica

- Quando f(x) não for somente positiva, pode-se considerar f(x) em módulo, para o cálculo da área, conforme a figura:



$$A = \int_a^c f(x) + \int_c^b |f(x)|dx \qquad \text{ou} \qquad A = \int_a^b |f(x)|dx$$

Integração Numérica

- A ideia básica da integração numérica é a substituição da função f(x) por um polinômio que a aproxime razoavelmente no intervalo [a, b]
- Assim o problema fica resolvido pela integração de polinômios, o que é trivial de se fazer. Com este raciocínio podemos deduzir fórmulas para aproximar $\int_a^b f(x)dx$

Integração Numérica

- As fórmulas terão expressões como:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) + \ldots + A_n f(x_n),$$

$$x_i \in [a, b],$$
$$i = 0, 1, \ldots, n$$

Integração Numérica – Fórmulas de Newton-Cotes

- Nas fórmulas de Newton-Cotes a ideia de polinômio que aproxime f(x) razoavelmente é que este polinômio interpole f(x) em pontos de [a, b] igualmente espaçados
- Consideremos a partição do intervalo [a, b] em subintervalos, de comprimento h, [x_i, x_{i+1}], i = 0, 1, ..., n-1. Assim $x_{i+1} - x_i$ = h = (b – a) / n

Integração Numérica – Fórmulas de Newton-Cotes

- As fórmulas fechadas de Newton-Cotes são fórmulas de integração do tipo $x_0 = a, x_n = b$ e

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) + \ldots + A_n f(x_n) = \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$$

sendo os coeficientes A_i determinados de acordo com o grau do polinômio aproximador

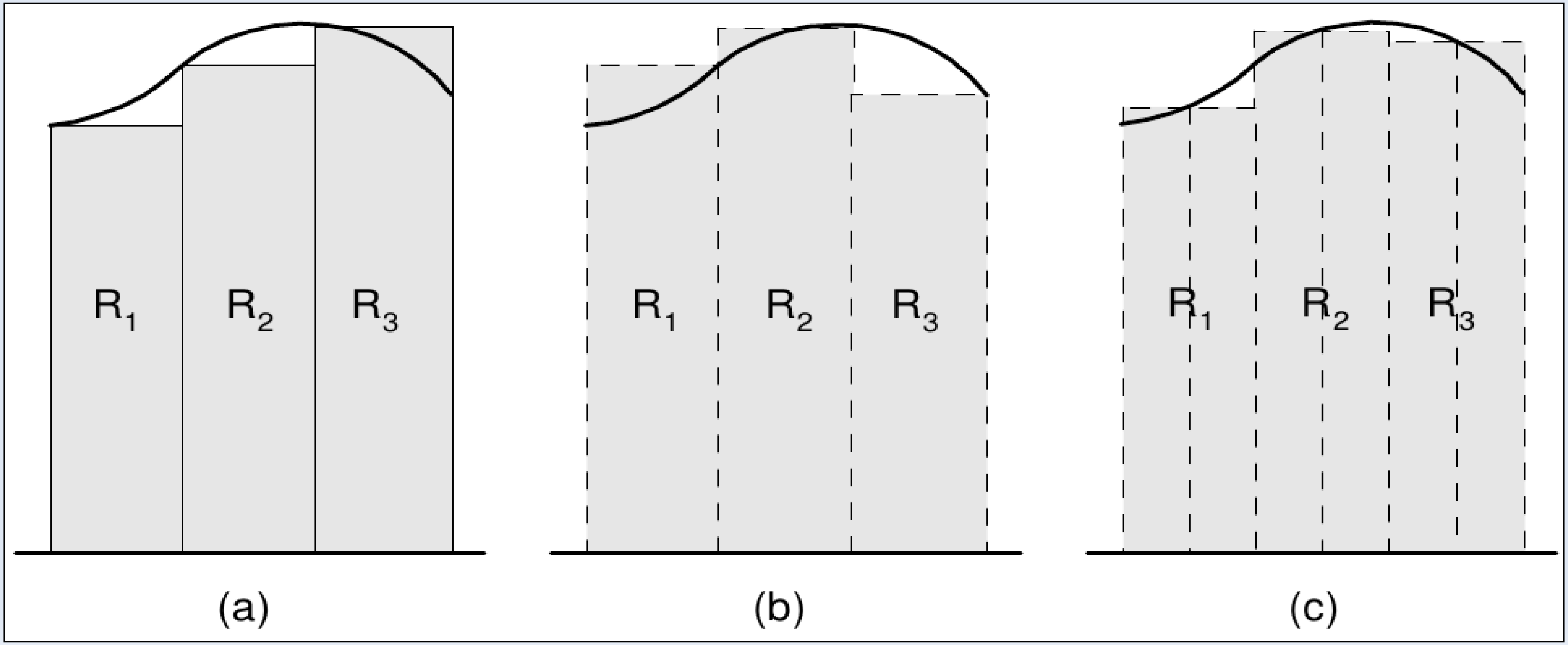
- Algumas das fórmulas fechadas de Newton-Cotes que analisaremos: Regra dos Retângulos, Regra dos Trapézios e Regra de Simpson

Regra dos Retângulos

- Seja o intervalo finito [a, b] no eixo x que é particionado em n subintervalos igualmente espaçados [x_i, x_{i+1}], com x_0 = a e $x_n = b$ e
$h_i = x_{i+1} - x_i$

Regra dos Retângulos

- O objetivo é calcular $\int_a^b f(x)\,dx$ pelo método da área dos retângulos. Tais retângulos podem ser considerados de diversas maneiras, conforme as figuras:



Regra dos Retângulos

- No primeiro caso, figura (a), a área de cada retângulo é $f(x_i)*h_i$; no segundo caso é $f(x_{i+1})*h_i$ e no último $f((x_i+x_{i+1})/2)*h_i$
- Em qualquer caso a soma das áreas dos retângulos será uma aproximação para $\int_a^b f(x)\,dx$

Regra dos Retângulos

- Subdividindo o intervalo [a, b] em n subintervalos, pela regra dos retângulos, que será indicado por R(h), é dada pelas fórmulas:

$$R(h_n)=\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)*h_i,$$

$$R(h_n)=\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1})*h_i,$$

$$R(h_n)=\sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{x_{i+1}+x_i}{2}\right)*h_i$$

Regra dos Retângulos

- conforme for tomado o caso (a) ou (b) ou (c) da figura acima. Como h_i é constante, temos h = (b-a)/n. Então

$$R(h_n) = h * \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i), ou$$

$$R(h_n) = h * \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1}), ou$$

$$R(h_n) = h * \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{x_{i+1} + x_i}{2}\right)$$

Regra dos Retângulos

- Em geral, quando utilizamos a regra dos retângulos iremos efetuar os cálculos através do caso (c), ou seja,

$$R(h_n) = h * \sum_{i=0}^{n-1} f(\bar{x}_i)$$

$$sendo\ \bar{x}_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$$

Regra dos Retângulos

Exemplo: Considere n = 10 e 4 casas decimais com arredondamento e calcule:

$$\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx$$

Regra dos Retângulos

Exemplo: Considere n = 10 e 4 casas decimais com arredondamento e calcule:

$$\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx$$

- Número de intervalos: n = 10
- Tamanho dos intervalos: $h=\dfrac{b-a}{n}=\dfrac{1-0}{10}=\dfrac{1}{10}=0{,}1$
- Extremos: $x_0=a=0$ $\qquad x_n=b=1$

Regra dos Retângulos

- Iterações:

i	x_i	x_{i+1}	(x_i + x_{i+1}) / 2	f((x_i + x_{i+1}) / 2)
0	0	0,1	0,05	0,0499
1	0,1	0,2	0,15	0,1467
2	0,2	0,3	0,25	0,2353
3	0,3	0,4	0,35	0,3118
4	0,4	0,5	0,45	0,3742
5	0,5	0,6	0,55	0,4223
6	0,6	0,7	0,65	0,4569
7	0,7	0,8	0,75	0,4800
8	0,8	0,9	0,85	0,4935
9	0,9	1	0,95	0,4993
			SOMA=	3,4699

$$R(h) = h * \sum f(\bar{x}_i) \;=\; R(0{,}1) = 0{,}1 * 3{,}4699 \;=\; 0{,}34699$$

Regra dos Retângulos

- Método analítico:

$$\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx$$

$$\left.\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)\right]_0^1$$

$$F(b)-F(a)=\frac{1}{2}\ln\left(1+1^2\right)-\frac{1}{2}\ln\left(1+0^2\right)$$

$$0{,}34657-0=0{,}34657$$

Regra dos Retângulos

Exercício: Usando n = 8 e 4 casas decimais com arredondamento, calcular

$$\int_{-1}^{1} x^3 \, dx$$

Regra dos Trapézios

- Numericamente, a regra dos trapézios é obtida aproximando-se f por um polinômio interpolador do 1° grau em vez de grau zero, como na regra dos retângulos
- Usando a fórmula de Lagrange para expressar o polinômio $p_1(x)$ que interpola $f(x)$ em x_0 e x_1, temos:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{a=x_0}^{b=x_1} p_1(x)\,dx$$

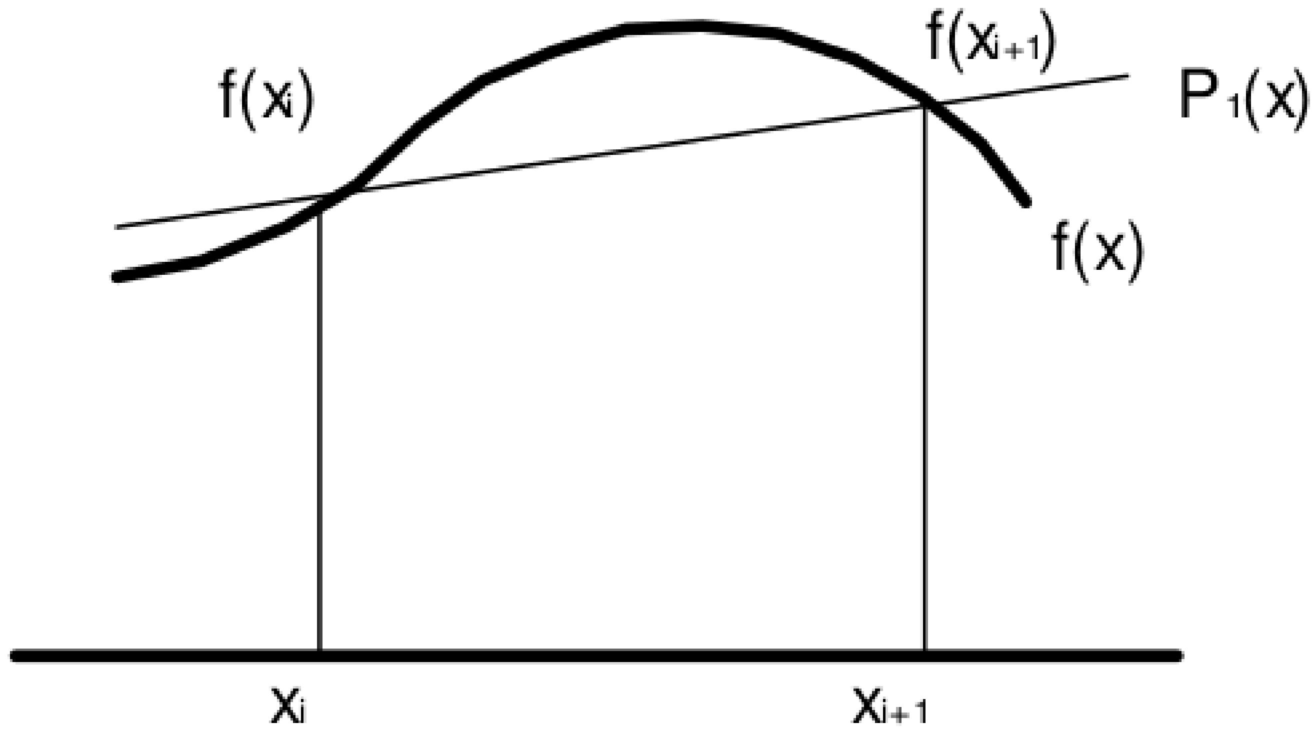
$$\int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{(x-x_1)}{-h} f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{h} f(x_1) \right] dx = I_T$$

Regra dos Trapézios

- Assim, $I_T = \frac{h}{2}\left[f\left(x_0\right) + f\left(x_1\right)\right]$, que é a área do trapézio de altura $h = x_1 - x_0$ e bases $f(x_0)$ e $f(x_1)$

Regra dos Trapézios

- Geometricamente, podemos ver, conforme a figura abaixo, a interpretação geométrica da regra dos trapézios:



Interpretação geométrica da regra dos trapézios

Regra dos Trapézios

- A área de cada trapézio é $\dfrac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2} * h_i$. A soma destas áreas será uma aproximação para $\int_a^b f(x)\,dx$

Regra dos Trapézios Repetida

- Seja o intervalo finito [a, b] no eixo x. Dividindo o intervalo em n subintervalos igualmente espaçados $[x_i, x_{i+1}]$, com $x_0 = a$ e $x_n = b$ e $h_i = x_{i+1} - x_i$, com a função f contínua nesse intervalo, pela regra dos trapézios, o resultado, indicado por T(h), é dado pela fórmula:

$$T(h_n) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} * h_i$$

Regra dos Trapézios Repetida

- Como h_i é constante, temos $h=\frac{b-a}{n}$. Então:

$$T(h_n)=h*\sum_{i=0}^{n-1}\frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2} \qquad ou$$

$$T(h_n)=\frac{h}{2}[f(x_0)+2*f(x_1)+2*f(x_2)+\ldots+2*f(x_{n-1})+f(x_n)]$$

Regra dos Trapézios Repetida

Exemplo: Calcular $\int_{3,0}^{3,6} \frac{1}{x}\,dx$ pela regra dos trapézios. Considere n = 6 e 4 casas decimais com arredondamento

- Número de intervalos: n = 6
- Tamanho do intervalo:

  h = (b – a)/n = (3,6 – 3) / 6 = 0,1

Regra dos Trapézios Repetida

- Iterações:

i	x_i	f(x_i)	c_i	c_i * f(x_i)
0	3	0,3333	1	0,3333
1	3,1	0,3226	2	0,6452
2	3,2	0,3125	2	0,6250
3	3,3	0,3030	2	0,6060
4	3,4	0,2941	2	0,5882
5	3,5	0,2857	2	0,5714
6	3,6	0,2778	1	0,2778
			SOMA=	3,6469

$$T(h_6)=\frac{h}{2}[f(x_0)+2*f(x_1)+2*f(x_2)+\ldots+2*f(x_5)+f(x_6)]$$

$$T(0,1)=\frac{0,1}{2}(3,6469)=\frac{0,36469}{2}=0,182345$$

Regra dos Trapézios Repetida

- Método analítico:

$$\int_{3,0}^{3,6} \frac{1}{x}\, dx = \ln(x)\Big]_{3,0}^{3,6}$$

$$\ln(3,6) - \ln(3,0)$$

$$1,280933845 - 1,098612289 = 0,182321556$$

Regra dos Trapézios Repetida

Exercícios:

- Calcular $\int_0^1 2x+3\,dx$ pela regra dos trapézios. Considere n = 1 e 4 casas decimais com arredondamento. Considere a primitiva de f(x) como sendo x² + 3x e calcule o erro absoluto de sua aproximação
- Calcular $\int_1^2 x\ln(x)\,dx$ pela regra dos trapézios e considerar os valores 1, 2, 4, 8 para n. Calcule também o erro absoluto de sua aproximação supondo a primitiva de f(x) como $\dfrac{2x^2*\ln(x)-x^2}{4}$

Regra de Simpson

- A regra de Simpson é obtida aproximando-se f por um polinômio interpolador de 2° grau, ou seja, uma parábola.
- Numericamente: Novamente podemos usar a fórmula de Lagrange para estabelecer a fórmula de integração resultante da aproximação de f(x) por um polinômio de grau 2. Seja $P_2(x)$ o polinômio que interpola f(x) nos pontos $x_0 = a$, $x_1 = x_0 + h$ e $x_2 = x_0 + 2h = b$:

$$P_2(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(-h)(-2h)}f(x_0)+\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(h)(-h)}f(x_1)+\frac{(x-x_0)(x-x_{01})}{(2h)(h)}f(x_2)$$

Regra de Simpson

- Assim,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx \approx \int_{x_0}^{x_2} p_2(x)\,dx$$

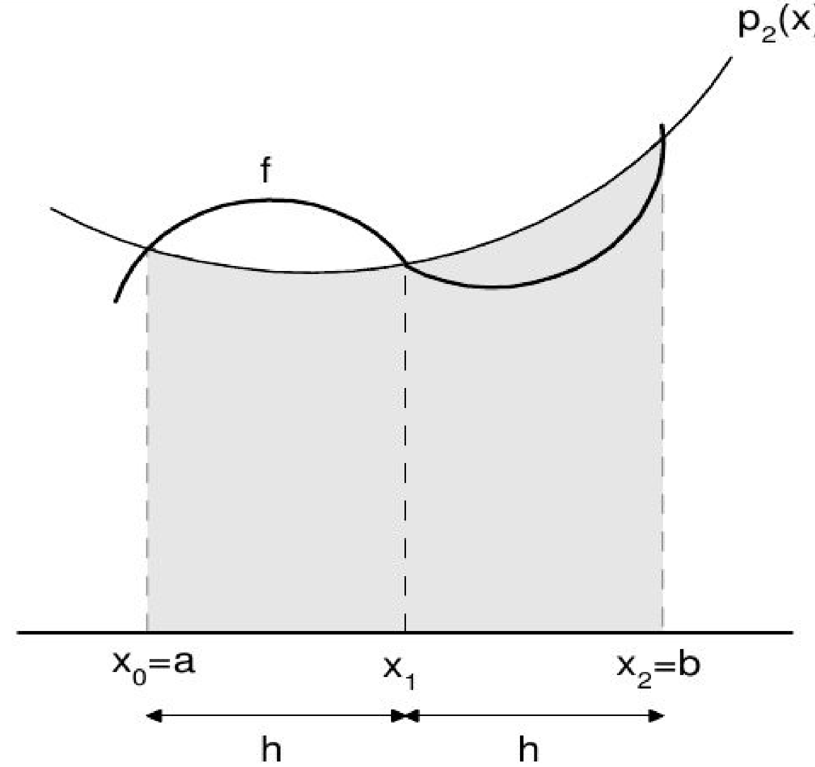
$$\frac{f(x_0)}{2h^2}\int_{x_0}^{x_2}(x-x_1)(x-x_2)\,dx - \frac{f(x_1)}{h^2}\int_{x_0}^{x_2}(x-x_0)(x-x_2)\,dx + \frac{f(x_2)}{2h^2}\int_{x_0}^{x_2}(x-x_0)(x-x_1)\,dx$$

- Resolvendo as integrais obtemos a regra de Simpson:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right] = I_S$$

Regra de Simpson

- Geometricamente, podemos ver, conforme a figura abaixo, a interpretação geométrica da regra de Simpson:



Interpretação geométrica da regra de Simpson simples

Regra de Simpson Repetida

- Aplicando a regra de Simpson repetidas vezes no intervalo $[a,b]=[x_0, x_n]$. Vamos supor que $x_0, x_1, \dots, x_n$ são pontos igualmente espaçados, $h=x_{i+1}-x_i$, e n é par (isto é condição necessária pois cada parábola utilizará três pontos consecutivos). Assim teremos:

$$\int_a^b f(x)dx \approx S(h_n)=\frac{h}{3}[f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+2f(x_4)+\dots+4f(x_{n-1})+f(x_n)]$$

Regra de Simpson Repetida

Exemplo: Calcular uma aproximação para $\int_0^1 e^x \, dx$ usando a regra de Simpson com n = 10

- Número de intervalos: n = 10
- Tamanho do intervalo:

  h = (b – a)/n = (1 – 0) / 10 = 0,1

Regra de Simpson Repetida

- Iterações:

i	x_i	f(x_i)	c_i	c_i * f(x_i)
0	0	1,0000	1	1,0000
1	0,1	1,1052	4	4,4207
2	0,2	1,2214	2	2,4428
3	0,3	1,3499	4	5,3994
4	0,4	1,4918	2	2,9836
5	0,5	1,6487	4	6,5949
6	0,6	1,8221	2	3,6442
7	0,7	2,0138	4	8,0550
8	0,8	2,2255	2	4,4511
9	0,9	2,4596	4	9,8384
10	1	2,7183	1	2,7183
			SOMA=	51,5485

$$S(h_{10})=\frac{h}{3}[f(x_0)+4*f(x_1)+2*f(x_2)+\ldots+4*f(x_9)+f(x_{10})]$$

$$S(0,1)=\frac{0,1}{3}(51,5485)=\frac{5,1549}{3}=1,7183$$

Regra de Simpson Repetida

- Método analítico:

$$\int_0^1 e^x\,dx = e^x\Big]_0^1$$

$$e^{(1)} - e^{(0)}$$

$$2{,}7182818285 - 1 = 1{,}7182818285$$

Regra de Simpson Repetida

Exercícios:

- Calcular o valor de π, dado pela expressão $4\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$, considerando n = 10. Considere a primitiva de f(x) como sendo 4 arctg(x) e calcule o erro absoluto de sua aproximação
- Calcular $\int_1^2 x\ln(x)dx$ pela regra de Simpson e considerar os valores 2, 4 e 8 para n. Calcule também o erro absoluto de sua aproximação supondo a primitiva de f(x) como sendo $\frac{2x^2 * \ln(x) - x^2}{4}$

Regra de Simpson Repetida

Exercícios:

- Calcular uma aproximação para $\int_0^1 x^2+1\,dx$, usando Simpson com n = 2. Considere a primitiva de f(x) como sendo $\frac{x^3}{3}+x$ e calcule o erro

  absoluto de sua aproximação