Universidade Federal do Paraná
Professor Murilo V. G. da Silva
Teoria da Computação – Material Complementar 1

Conjuntos enumeráveis e não enumeráveis

Em teoria da computação em geral estamos interessados em conjuntos "discretos" como $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ ao invés de conjuntos "contínuos", como o conjunto $\mathbb{R}$. O objetivo deste material é mostrar que embora tanto os conjuntos discretos como os conjuntos contínuos sejam conjuntos infinitos, há algo fundamentalmente diferente entre eles.

Cardinalidade de conjuntos revisitada:

Primeiramente, vamos dizer que dois conjuntos ***A* e *B* tem a mesma cardinalidade se existe uma bijeção entre *A* e *B***. Para todo $k > 0$, seja $A_k = \{1, 2, 3, ..., k\}$ o subconjunto **finito** não vazio de $\mathbb{N}$ de números consecutivos começando de 1 e terminando em k (por exemplo, $A_4 = \{1, 2, 3, 4\}$). Definimos $A_0 = \varnothing$.

Segue nossa definição de cardinalidade de conjuntos:

- A cardinalidade do conjunto **finito** A_k é k e escrevemos $|A_k| = k$.
- A cardinalidade do conjunto **infinito** $\mathbb{N}$ é denotada por $\aleph_0$.
- Um conjunto é **enumerável** se é finito ou se tem cardinalidade $\aleph_0$.

Pergunta: Qual a cardinalidade de $X = \{a, b, c, d, e\}$?
Resposta: $|X| = 5$, pois existe uma bijeção entre X e $A_5 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Uma coisa importante é mantermos a uniformidade da nossa definição de cardinalidade, ou seja, caso exista uma bijeção entre um determinado conjunto X e $\mathbb{N}$, podemos dizer que X tem cardinalidade $\aleph_0$. Entretanto, veremos que nem sempre essas bijeções entre conjuntos infinitos existem e portanto diferentes conjuntos infinitos podem ter cadinalidades diferentes. Em outras palavras, dois conjuntos infinitos podem não ter o mesmo tamanho!

Pergunta: Qual a cardinalidade do conjunto dos números pares?
Resposta: A mesma cardinalidade de $\mathbb{N}$, pois existe uma bijeção entre o conjunto dos pares e $\mathbb{N}$.

Pergunta: Qual é a cardinalidade dos conjuntos infinitos $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{R}$?
Resposta: Veremos no decorrer desta aula.

Importante: Uma vez que vamos lidar com conjuntos contínuos nas demonstrações abaixo, temos que tomar o seguinte cuidado: O que significa descrever um número usando notação decimal? Essencialmente estamos usando símbolos para representar "quantidades" ou "números". Por exemplo, o símbolo 0,5 e o símbolo $\frac{1}{2}$ representam o mesmo número, assim como $\frac{1}{3}$ e 0,333... Entretanto, temos que tomar cuidado com algumas situações contraintuitivas quando usamos os "três pontinhos" na notação decimal. Veja o teorema a seguir:

Teorema: 0,999... $= 1$

Prova: Vamos ver isso com calma. Primeiramente é conveniente observar que 0,999... $= \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \frac{9}{10000} + ...$, ou seja, uma soma de termos $\frac{9}{10^k}$ onde k começa em 1 e cresce indefinidamente. Uma outra identidade útil (a prova é fácil e fica como exercício) é a seguinte: $\sum_{k=1}^{n} \frac{9}{10^k} = 1 - \frac{1}{10^n}$. Com isso em mente podemos provar o que queremos. Passo a passo fica assim:

$$0{,}999... = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{9}{10^k} = \lim_{n\to\infty} (1 - \frac{1}{10^n}) = 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{10^n} = 1$$

Conjuntos não enumeráveis: Se um conjunto X tem cardinalidade maior do que a cardinalidade dos números naturais, dizemos que X não é enumerável.

Teorema: O intervalo $(0, 1]$ não é enumerável. (lembrete: um intervalo é um subconjunto de $\mathbb{R}$)

Prova: Suponha que $(0, 1]$ é enumerável. Vamos representar cada elemento do conjunto $[0, 1]$ por uma expansão decimal do tipo 0,$d_1d_2d_3$..., onde cada d_i é um dígito decimal. Entretanto, temos que tomar cuidado, pois a notação por expanção decimal é perigosa. Primeiramente observamos que para representar o número 1 (que está neste intervalo) usaremos 0,999... Outro ponto a se tomar coisado é observar que o número representado pela expansão 0,359999... é o mesmo número representado pela expansão 0,36000... (isso é verdade pelo mesmo argumento usado para mostrar que 1 = 0,999...).

Estamos tomando todos estes cuidados, pois vamos supor que existe uma bijeção f entre $\mathbb{N}$ e $(0, 1]$ e para tal precisamos ter certeza que estamos sendo consistentes e não estamos associando duas expansões decimais diferentes que representam um único número real a dois números naturais diferentes. Uma vez que tomamos estes cuidados, suponha então que existe tal bijeção f:

$f(0) = 0, d_{00}d_{01}d_{02}d_{03}...$
$f(1) = 0, d_{10}d_{11}d_{12}d_{13}...$
$f(2) = 0, d_{20}d_{21}d_{22}d_{23}...$
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

O que vamos provar agora é que existe um número real p no intervalo $(0, 1]$ que não é $f(k)$ para nenhum natural k. Considere o seguinte número real $p = 0, p_1p_2p_3...$ onde $p_i = 0$ caso $d_{ii} \neq 0$ e $p_i = 1$ caso $d_{ii} = 0$. Em particular, note que $\forall i \in \mathbb{N}$, $p_i \neq d_{ii}$. Suponha que existe k tal que $f(k) = p$ para algum $k \in \mathbb{N}$. Lembramos que :

$f(k) = 0, d_{k0}d_{k1}d_{k2}...d_{kk}...$

Ou seja, $f(k) = 0, p_0p_1p_2...p_k...$ e portanto $p_0 = d_{00}$, $p_1 = d_{11}$,..., $p_k = d_{kk}$, etc. Mas isso é uma contradição, pois pela escolha de p, temos que $p_k \neq p_{kk}$. Portanto $\nexists k$ tal que $f(k) = p$ e com isso, embora seja possível mapear todo natural para um número de $(0, 1]$ (pense a respeito!), não é possível mapear todos os números de $(0, 1]$ para $\mathcal{N}$ e portanto a cardinalidade de $(0, 1]$ é maior do que a cardinalidade de $\mathbb{N}$. Portanto $(0, 1]$ não é enumerável.

Exercício para casa: Se A não é enumerável e $A \subseteq B$, então B não é enumerável.

Exercício para casa: Se A é enumerável e $B \subseteq A$, então B é enumerável.

Teorema: O conjunto $\mathbb{R}$ não é enumerável.

Prova: Consequência de que $(0, 1]$ não é enumerável e que $(0, 1] \subset \mathbb{R}$.

Teorema: O conjunto $\mathbb{Z}$ é enumerável.

Prova: Basta mostrar que existe uma bijeção entre os conjuntos $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$. A bijeção $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ é a seguinte: Se $x \geq 0$, $f(x) = 2n$. Se $x < 0$, $f(x) = -(2x + 1)$.

Teorema: O conjunto $\mathbb{Q}$ é enumerável.

Prova: Vista em sala de aula.

Cardinalidade do conjunto $\mathbb{R}$: Definimos $|\mathbb{R}| = \aleph_1$.

Exercício para casa (OPCIONAL): Pesquise sobre a Hipótese do Continuum.