Interpolação

- Introdução
  - A interpolação é outra técnicas bem conhecida e básica do cálculo numérico.
  - Muitas funções são conhecidas apenas em um conjunto finito e discreto de pontos de um intervalo [a,b]. A tabela abaixo, por exemplo, informa o número de carros que passam por um determinado pedágio em um determinado dia .

X_i	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
Horário	10:00	11:00	12:00	13:00	14:00	15:00
Número (em mil)	2,69	1,64	1,09	1,04	1,49	2,44

Tabela 1

Interpolação

- Introdução
  - A partir desses dados suponhamos que se queira calcular:
    - o número de carros que passariam pelo pedágio às 11:30.
  - A interpolação tem o objetivo de ajudar na resolução deste tipo de problema.
  - E também pode ser aplicada sobre um conjunto de valores obtidos através de experimentos.

Interpolação

- Introdução

  - Interpolar uma função *f(x)* consiste em aproximar essa função por uma outra função *g(x)*.

  - *g(x)* é escolhida entre uma classe de funções definidas *a priori* e que satisfaçam algumas propriedades.

  - A função *g(x)* é então usada em substituição à função *f(x)*.

Interpolação

- Introdução

  - A necessidade de se efetuar esta substituição surge em várias situações, como por exemplo:

    - Quando são conhecidos somente os valores numéricos da função por um conjunto de pontos (não dispondo de sua forma analítica) e é necessário calcular o valor da função em um ponto não tabelado (exemplo anterior).

Interpolação

- Introdução

  - Quando a função em estudo tem uma expressão tal que operações como a diferenciação e a integração são difíceis ou impossíveis de serem realizadas.

  - Neste caso, podemos procurar uma outra função que seja uma aproximação da função dada e cujo manuseio seja bem mais simples.

Interpolação

- Introdução

  - As funções que substituem as funções dadas podem ser de tipos variados, tais como:
    - polinomiais;
    - trigonométricas;
    - exponenciais;
    - logarítmicas.
  - Porém, será considerado apenas o estudo das funções polinomiais.

Interpolação

- Conceito de Interpolação
  - Seja a função *y = f(x)*, dada pela tabela 1.
    Deseja-se determinar $f(\ddot{X})$, sendo:
    - a) $\ddot{X} \in (x_0 , x_6)$ e $\ddot{X} \neq x_i$, i = 0, 1, ..., 6
    - b) $\ddot{X} \notin (x_0 , x_6)$
  - Para resolver (a) tem-se que fazer uma interpolação.
  - Sendo assim, determina-se o polinômio interpolador, que é uma função tabelada.
  - Porém, para resolver (b), deve-se realizar uma extrapolação.

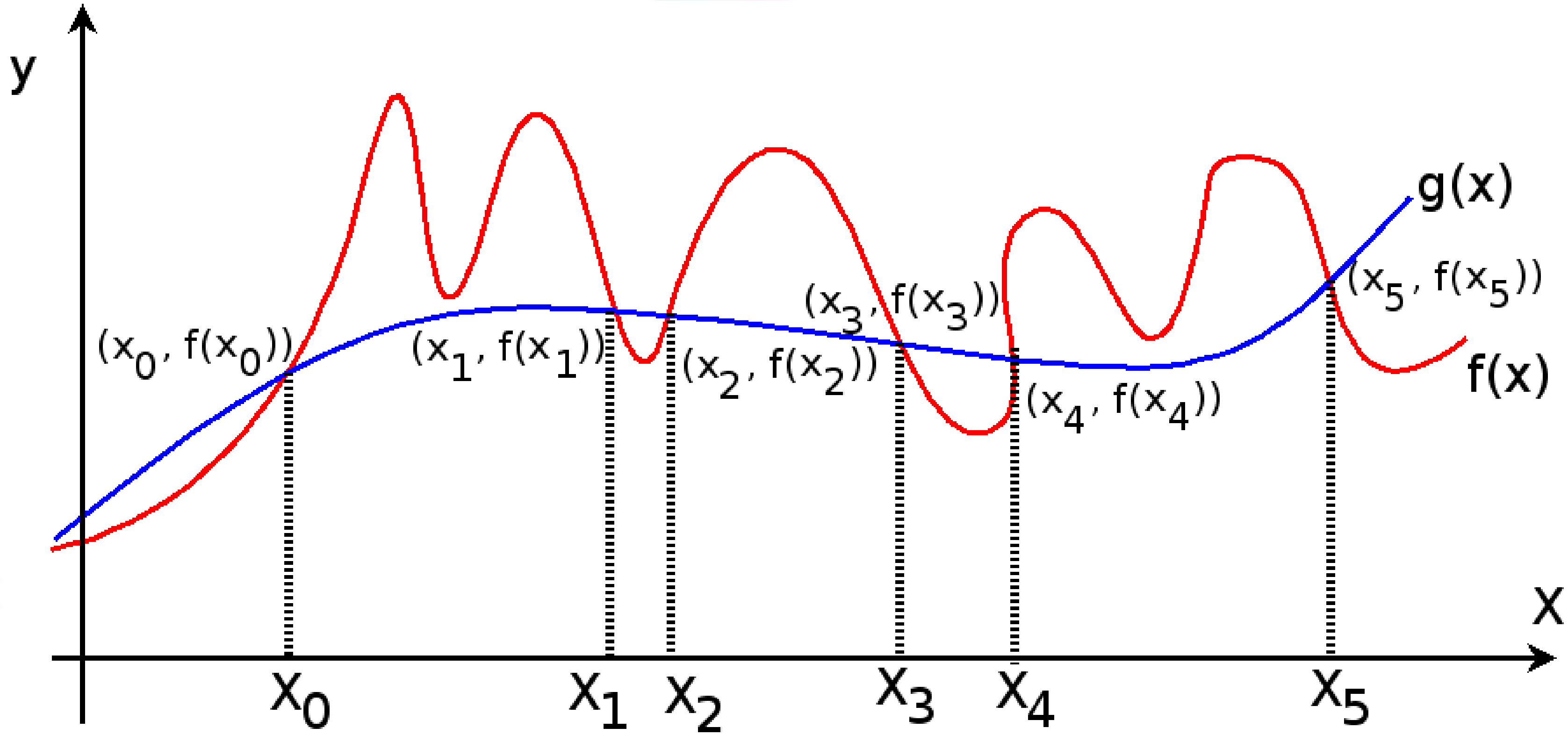
Interpolação

- Conceito de Interpolação
  - Consideremos (n+1) pontos distintos: x_0, x_1, ..., x_n, chamados *nós da interpolação*, e os valores de *f(x)* nesses pontos: $f(x_0)$, $f(x_1)$, ..., $f(x_n)$.
  - Uma forma de interpolação de *f(x)* consiste em se obter uma determinada função *g(x)* tal que:

$$
\begin{aligned}
g(x_0) &= f(x_0) \\
g(x_1) &= f(x_1) \\
g(x_2) &= f(x_2) \\
&\vdots \\
g(x_n) &= f(x_n)
\end{aligned}
$$

Interpolação

- Conceito de Interpolação
  - Graficamente temos:



Interpretação geométrica para n = 5

Interpolação

- Interpolação Linear
  - Obtenção da fórmula
    - Dados dois pontos distintos de uma função $y = f(x)$: (x_0,y_0) e (x_1,y_1), deseja-se calcular o valor de $\bar{y}$ para um determinado valor de $\ddot{X}$ entre x_0 e x_1 , usando a interpolação polinomial.
    - O polinômio interpolador é uma unidade menor que o número de pontos conhecidos.
    - Assim, o polinômio interpolador nesse caso terá grau 1, isto é:
      - $P_1(x) = a_1x + a_0$

Interpolação

- Interpolação Linear
  - Obtenção da fórmula
    - Para determinar este polinômio, os coeficientes a_0 e a_1 devem ser calculados de forma que se tenha:
      - $P_1(x_0) = f(x_0) = y_0$ e $P_1(x_1) = f(x_1) = y_1$
    - Ou seja, basta resolver o sistema linear abaixo:
      - $a_1x_0 + a_0 = y_0$
      - $a_1x_1 + a_0 = y_1$ onde a_1 e a_0 são as incógtas e

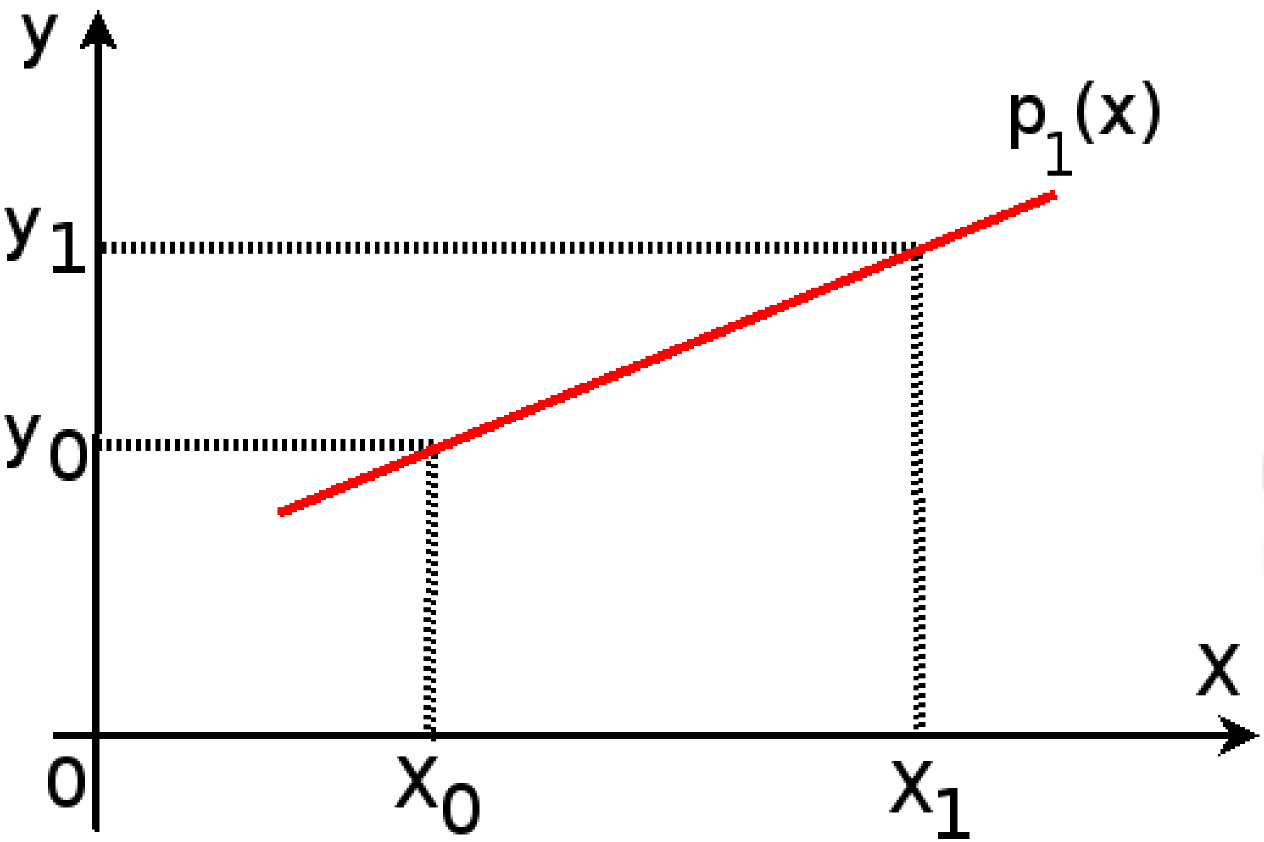
$$A = \begin{bmatrix} x_0 & 1 \\ x_1 & 1 \end{bmatrix}$$ é a matriz dos coeficientes.

Interpolação

- Interpolação Linear
  - Obtenção da fórmula
    - O determinante da matriz *A* é diferente de zero, sempre que $x_0 \neq x_1$, logo para pontos distintos o sistema tem solução única.
    - O polinômior interpolador $P_1(x) = a_1x + a_0$ tem como imagem geométrica uma reta, portanto a função *f(x)* está sendo aproximada por uma reta que passa pelos pontos conhecidos (x_0,y_0) e (x_1,y_1).

Interpolação

- Interpolação Linear
  - O gráfico abaixo, mostra geometricamente, os dois pontos (x_0,y_0) e (x_1,y_1), e a reta que passa por eles.



Interpolação

- Interpolação Linear

  - Exemplo – Seja a função $y = f(x)$ definida pelos pontos da tabela baixo. Determinar o valor de $f(15)$.

x	y
10	250
20	432
30	500

- $P_1(15) = 341$

Interpolação

- Interpolação Linear
  - Exercício – Na fabricação de determinadas cerâmicas é muito importante saber as condições de temperatura em que o produto foi assado no forno. Como não é possível medir a temperatura do forno a todo instante, ela é medida em intervalos periódicos de tempo e esses dados são interpolados para o instante em que cada peça foi “queimada” a fim de se conhecer a temperatura do forno nesse instante. Em um dia de funcionamento do forno, os seguintes dados foram coletados:

Horário	10:00	13:00	16:00	19:00
Temperatura (10^2 °C)	2,51	2,63	2,55	2,41

  - Estime a temperatura do forno ás 14:30.

Interpolação

- Interpolação Quadrática
  - Obtenção da fórmula
    - Se conhecermos três pontos distintos de uma função, então o polinômio interpolador será:
      - $P_2(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$
    - O polinômio $P_2(x)$ é conhecido como função quadrática cuja imagem geométrica é uma parábola.
    - Portanto, a função *f(x)* é aproximada por uma parábola que passa pelos três pontos conhecidos (x_0,y_0), (x_1,y_1) e (x_2,y_2).

Interpolação

- Interpolação Quadrática
  - Obtenção da fórmula
    - Para determinar os valores de a_0 ,a_1 e a_2 é necessário resolver o sistema:
      - $a_2x_0^2 + a_1x_0 + a_0 = y_0$
      - $a_2x_1^2 + a_1x_1 + a_0 = y_1$
      - $a_2x_2^2 + a_1x_2 + a_0 = y_2$

      onde a_1 ,a_0 e a_2 são as incógnitas e os pontos (x_0,y_0), (x_1,y_1) e (x_2,y_2) são conhecidos.

Interpolação

- Interpolação Quadrática
  - Obtenção da fórmula
    - A matriz dos coeficientes é:

$$A = \begin{bmatrix} x_0^2 & x_0 & 1 \\ x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \end{bmatrix}$$

    - Como os pontos são distintos, então o sistema terá solução única.

Interpolação

- Interpolação Quadrática
  - Exemplo – A velocidade do som na água varia com a temperatura de acordo com a tabela abaixo:

x_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
Temperatura (°C)	86,0	93,3	98,9	104,4	110,0
Velocidade (m/s)	1552	1548	1544	1538	1532
Tabela 4					

  - Pretende-se estimar a velocidade do som na água a uma temperatura de 100 °C, com quatro casas decimais com arredondamento.
    - $P_2(100) = 1542,9645$

Interpolação

- Interpolação Quadrática
  - Exercício – A resistência de um certo fio (de uma certa substância), *f(x)*, varia com o diâmetro desse fio. A partir de uma experiência registaram-se os seguintes valores:

	x_1	x_2	x_3	x_4
Diâmetro	1,5	2,0	3,0	4,0
$f(x_i)$	4,9	3,3	2,0	1,5

Tabela 5

  - Estime a resistência de um fio com o diâmetro de 2,7, com quatro casas decimais com arredondamento.

Interpolação

- Interpolação de Lagrange

  - As interpolações vistas anteriormente são casos particulares da interpolação de Lagrange. Vamos estudar agora o polinômio interpolador de grau menor ou igual a n, sendo dados $n + 1$ pontos distintos.

Interpolação

- Interpolação de Lagrange

  - **Teorema:** Sejam(x_i,y_i), i = 0, 1, 2, ..., *n*, *n*+1 pontos distintos, isto é, $x_i \neq x_j$ para $i \neq j$. Existe um único polinômio *P*(x) de grau menor ou igual a *n*, tal que *P*(x_i) = y_i, para todo i.

  - O polinômio *P*(x) pode ser escrito na forma:

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

ou $$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

Interpolação

- Interpolação de Lagrange

  - *P*(x) é, no máximo, de grau *n*, se $a_n \neq 0$ e, para determiná-lo, deve-se conhecer os valores de a_0, a_1, ..., a_n. Como $P_n(x)$ contém os pontos (x_i, y_i), i = 0, 1, ..., *n*, pode-se escrever que $P_n(x_i) = y_i$.

  - Então temos que:

$$a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \ldots + a_n x_0^n = y_0$$

$$a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \ldots + a_n x_1^n = y_1$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \ldots + a_n x_n^n = y_n$$

Interpolação

- Interpolação de Lagrange
  - Resolvendo o sistema , determina-se o polinômio $P_n(x)$. Para provar que tal polinômio é único, basta que se mostre que o determinante da matriz A, dos coeficientes das incógnitas do sistema, é diferente de zero. A matriz *A* é:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{bmatrix}$$

Interpolação

- Interpolação de Lagrange

  - Mas o determinante da matriz *A* é conhecido como determinante das potências ou de Vandermonde e, da Álgebra Linear, sabe-se que seu valor é dado por:

$$det(A) = \prod_{i>j} (x_i - x_j)$$

  - Como $x_i \neq x_j$ para $i \neq j$, vem que $\det(A) \neq 0$.

  - Logo, *P*(x) é único.

Interpolação

- Interpolação de Lagrange

  - Exemplo: Sejam os valores: $x_0 = 5$, $x_1 = 3$, $x_2 = 2$ e $x_3 = 4$ (elementos característicos).

$$\prod_{i>j}(x_i - x_j) = (x_1 - x_0)(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)$$

$$\prod_{i>j}(x_i - x_j) = (-2)(-3)(-1)(-1)(1)(2) = 12$$

  - Este valor é igual ao determinante da matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 25 & 125 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{bmatrix}$$

Interpolação

- Interpolação de Lagrange
  - Obtenção da fórmula
    - Sejam $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$, $(n + 1)$ pontos distintos e $y_i = f(x_i)$, i = 0, 1, ..., n.
    - Seja $P_n(x)$ o polinômio de grau $\leq n$ que interpola f em $x_0, ..., x_n$.
    - Podemos representar $P_n(x)$ na forma:

$$P_n(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + ... + y_n L_n(x)$$

onde os polinômios $L_k(x)$ são de grau n.

Interpolação

- Interpolação de Lagrange
  - Obtenção da fórmula
    - Para cada *i*, queremos que a condição $P_n(x) = y_i$ seja satisfeita, ou seja:

$$P_n(x_i) = y_0 L_0(x_i) + y_1 L_1(x_i) + \ldots + y_n L_n(x_i) = y_i$$

    - A forma mais simples de se satisfazer esta condição é impor:

$$L_k(x_i) = \left\{ \begin{array}{lll} 0 & se & k \neq i \\ 1 & se & k = 1 \end{array} \right\}$$

Interpolação

- Interpolação de Lagrange
  - Obtenção da fórmula
    - E para isso, definimos $L_k(x)$ por:

$$L_k = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\ldots(x - x_n)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1)\ldots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\ldots(x_k - x_n)}$$

    - Como o numerador de $L_k(x)$ é um produto de n fatores da forma: $(x - x_i)$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, $i \neq k$, então $L_k(x)$ é um polinômio de grau n e, assim, $P_n(x)$ é um polinômio de grau menor ou igual a n.

Interpolação

- Interpolação de Lagrange
  - Obtenção da fórmula
    - Além disso, para x = x_i, i = 0, ..., *n* temos:

$$P_n(x_i)=\sum_{k=0}^{n} y_k L_k(x_i)=y_i L_i(x_i)=y_i$$

    - Então, a interpolação de Lagrange para o polinômio interpolador é:

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n} y_k L_k(x), onde\, L_k(x)=\prod_{j=0, j\neq k}^{n} \frac{(x-x_j)}{(x_k-x_j)}$$

Interpolação

- Interpolação de Lagrange

    - Fórmula da interpolação lagrangeana:

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\left[y_k\prod_{j=0,j\neq k}^{n}\frac{(x-x_j)}{(x_k-x_j)}\right]$$

Interpolação

- Interpolação de Lagrange

  - Exemplo – A velocidade do som na água varia com a temperatura de acordo com a tabela abaixo:

x_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
Temperatura (°C)	86,0	93,3	98,9	104,4	110,0
Velocidade (m/s)	1552	1548	1544	1538	1532

Tabela 6

  - Pretende-se estimar a velocidade do som na água a uma temperatura de 100 °C, utilizando para tal 3 pontos.