

# Interpolação

- **Diferenças Divididas**

- Seja  $f(x)$ , função tabelada em  $n + 1$  pontos distintos  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ . Defini-se o operador diferenças divididas por:

$$f[x_0] = f(x_0)$$

$$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$$

⋮

$$f[x_0, x_1, x_2, \dots, x_n] = \frac{f[x_1, x_2, \dots, x_n] - f[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}$$

# Interpolação

- Diferenças Divididas

- Dizemos que  $f[x_0, x_1, x_2, \dots, x_n]$  é a diferença dividida de ordem  $k$  da função  $f(x)$  sobre os  $k + 1$  pontos.
- Conhecidos os valores que  $f(x)$  assume nos pontos distintos  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ , podemos construir a tabela:

$x_i$	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	...	Ordem n
$x_0$	$f[x_0]$	$f[x_0, x_1]$	$f[x_0, x_1, x_2]$		$f[x_0, x_1, x_2, \dots, x_n]$
$x_1$	$f[x_1]$	$f[x_1, x_2]$	$f[x_1, x_2, x_3]$		-
$x_2$	$f[x_2]$	$f[x_2, x_3]$	$f[x_2, x_3, x_4]$		-
...	...	...	...		...
$x_{n-2}$	$f[x_{n-2}]$	$f[x_{n-2}, x_{n-1}]$	$f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]$		-
$x_{n-1}$	$f[x_{n-1}]$	$f[x_{n-1}, x_n]$	-		-
$x_n$	$f[x_n]$	-	-		-

# Interpolação

- Propriedade do Operador Diferenças Divididas
  - Pode-se provar que as diferenças divididas satisfazem a propriedade de ser simétrico nos argumentos.
  - Exemplo:

$$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \frac{f[x_0] - f[x_1]}{x_0 - x_1} = f[x_1, x_0]$$

# Interpolação

- Interpolação de Newton com Diferenças Divididas
  - Pode-se provar que cada coeficiente  $a_n$  do polinômio interpolador de Newton corresponde ao operador de grau  $n$  de diferenças divididas:

$$f[x_0] = a_0$$

$$f[x_0, x_1] = a_1$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = a_2$$

⋮

$$f[x_0, x_1, x_2, \dots, x_n] = a_n$$

# Interpolação

- Interpolação de Newton com Diferenças Divididas

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + a_n(x - x_0)\dots(x - x_{n-1})$$

$$P_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \dots \\ + f[x_0, x_1, x_2, \dots, x_n](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_{n-1})$$

# Interpolação

- **Interpolação de Newton com Diferenças Divididas**
  - Exemplo – A velocidade  $V$  (em m/s) de um foguete lançado do solo foi medida quatro vezes,  $t$  segundos após o lançamento, e os resultados foram registados na tabela. Determinar a velocidade do foguete 25 segundos após o lançamento, usando um polinômio interpolador do segundo grau (3 pontos).

	$X_0$	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$
Tempo	0	8	20	30	45
Velocidade (m/s)	0,0	52,032	160,450	275,961	370,276

Tabela 9