

Universidade Federal do Paraná
Especialização em Inteligência Artificial Aplicada

Mobile Robotics

Cinemática

Prof. Eduardo Todt
2019



Cinemática

Cinemática é a parte da mecânica clássica que descreve movimento de objetos sem preocupar-se com as causas

Controlabilidade define caminhos e trajetórias realizáveis

Dinâmica impõe restrições por massa e forças



Localização

Integração de movimentos

Erros por escorregamento, terreno irregular, obstáculos, quantização, diâmetro rodas

Robôs móveis: contribuição de cada roda

Avanço por rotação

Restrições

movimento lateral

fixação ao chassis

Modelo cinemático

Estabelecer velocidade do robô em função das velocidades das rodas $\dot{\varphi}$, ângulos de direção β_i , velocidades de direção e parâmetros geométricos do robô

Cinemática direta

$$\dot{\xi} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = f(\dot{\varphi}_1, \dots, \dot{\varphi}_n, \beta_1, \dots, \beta_m, \dot{\beta}_1, \dots, \dot{\beta}_m)$$

Cinemática inversa

$$[\dot{\varphi}_1 \ \dots \ \dot{\varphi}_n \ \beta_1 \ \dots \ \beta_m \ \dot{\beta}_1 \ \dots \ \dot{\beta}_m]^T = f(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\theta})$$

Robô rígido movendo-se no plano

Pose 3D => (x, y e orientação)

- Representing the robot within an arbitrary initial frame

- Initial frame: $\{X_I, Y_I\}$

- Robot frame: $\{X_R, Y_R\}$

- Robot position: $\xi_I = [x \quad y \quad \theta]^T$

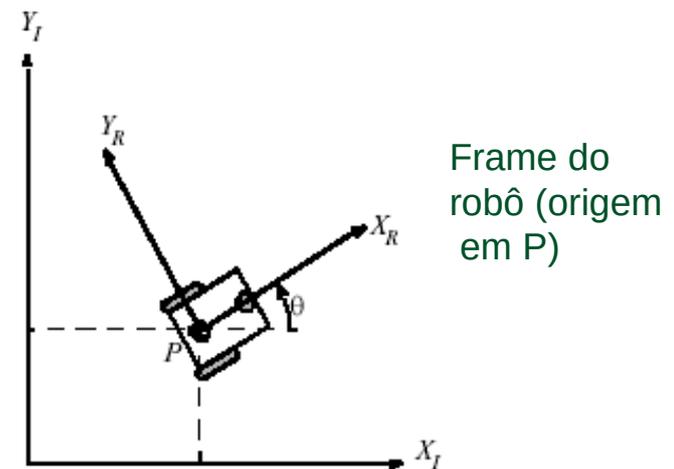
- Mapping between the two frames

$$\dot{\xi}_R = R(\theta)\dot{\xi}_I = R(\theta) \cdot [\dot{x} \quad \dot{y} \quad \dot{\theta}]^T$$

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

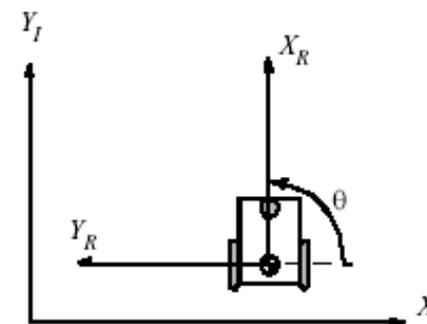
- Example: Robot aligned with Y_I

R: Matriz de Rotação Ortogonal



Frame do robô (origem em P)

Frame de referência

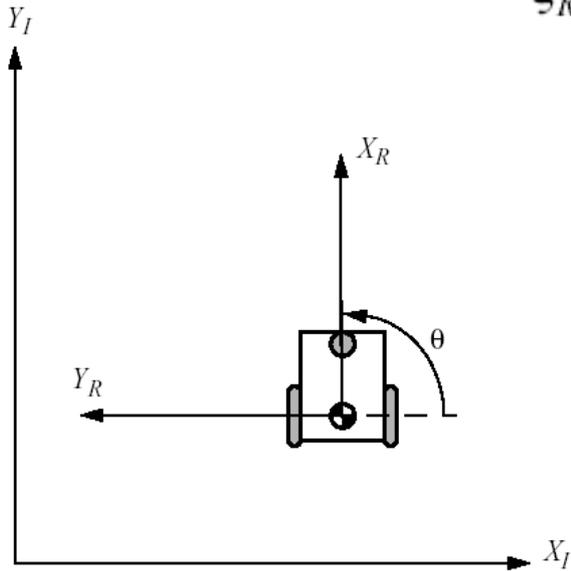


Mapeamento depende do ângulo entre frames

$$\dot{\xi}_R = R(\theta)\dot{\xi}_I = R(\theta) \cdot [\dot{x} \quad \dot{y} \quad \dot{\theta}]^T$$

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Deslocamento com velocidade
5 eixo x frame referencia

$$\dot{\xi}_R = R\left(\frac{\pi}{2}\right)\dot{\xi}_I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{y} \\ -\dot{x} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

No frame do robô isto
parece -5 no seu eixo Y

Restrições cinemáticas

Movimento em plano horizontal

Ponto de contato

Não deformáveis

Rolamento puro

Sem escorregamentos

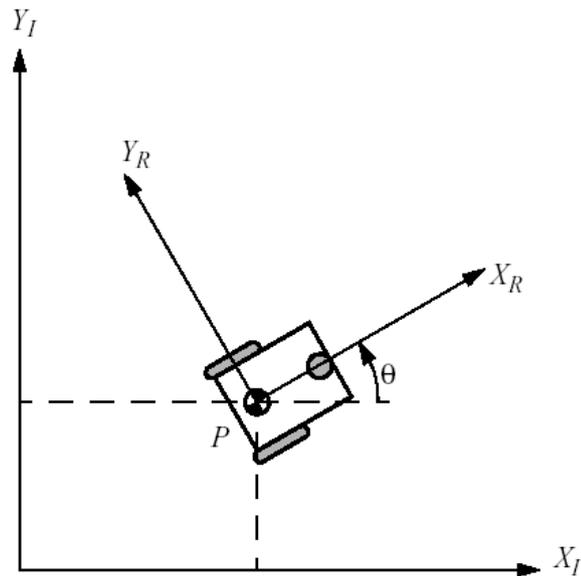
Sem fricção para rotação no ponto contato

Eixos ortogonais à superfície

Conexão rígida ao chassis



Modelo cinemático direto



$$\dot{\xi}_I = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = f(l, r, \theta, \dot{\phi}_1, \dot{\phi}_2) \quad \dot{\xi}_I = R(\theta)^{-1} \dot{\xi}_R$$

l = dist. roda até centro eixo (P)

r = raio da roda

$\dot{\phi}_i$ = velocidade angular roda i em rad/s

Contribuição instantânea de cada roda para **avanço** x_R

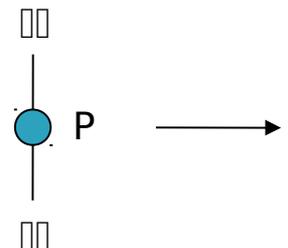
$$\dot{x}_{r1} = (1/2)r\dot{\phi}_1$$

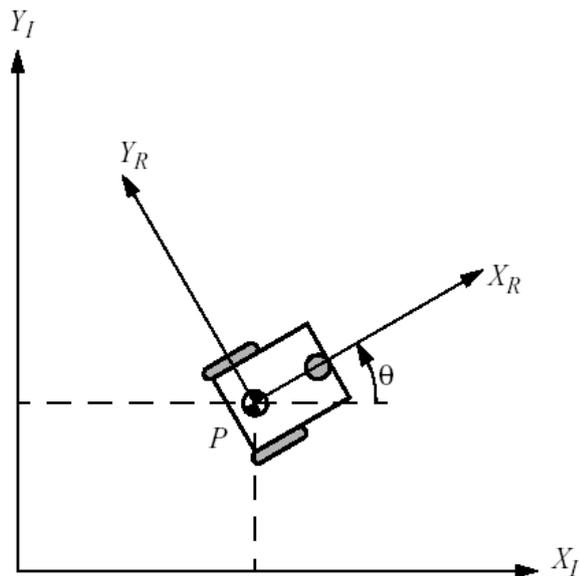
$$\dot{x}_{r2} = (1/2)r\dot{\phi}_2$$

→ Em robô de duas rodas de tração diferencial basta somar as duas

Contribuição instantânea de cada roda para avanço $y_R =$ zero

Veja: rodas girando em direções opostas velocidade resultante em x é nula





$$\dot{\xi}_I = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = f(l, r, \theta, \dot{\phi}_1, \dot{\phi}_2) \quad \xi_I = R(\theta)^{-1} \xi_R$$

l = dist. roda até centro eixo (P)

r = raio da roda

$\dot{\phi}_i$ = velocidade angular roda i em rad/s

Contribuição instantânea de cada roda para **rotação** em torno de P

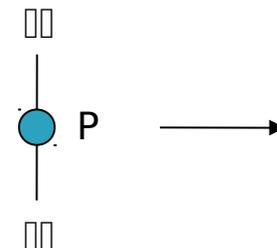
Veja: rodas girando na mesma direção, rotação resultante em x é nula

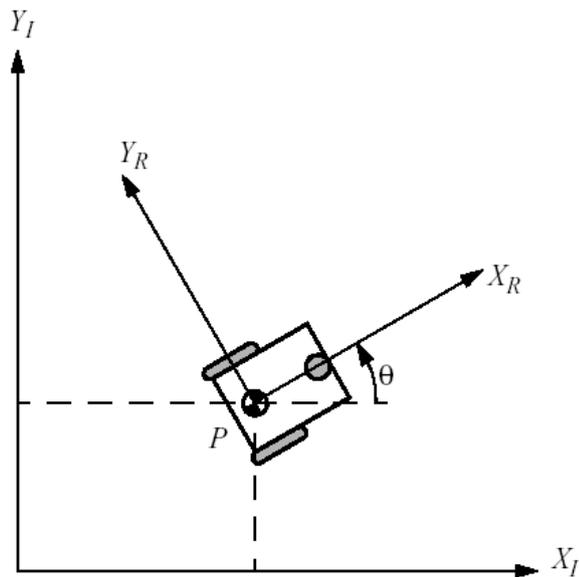
$$\omega_1 = \frac{r\dot{\phi}_1}{2l}$$

$$\omega_2 = \frac{-r\dot{\phi}_2}{2l}$$

→ Em robô de duas rodas de tração diferencial basta somar as duas

Dica: cada uma realiza arco de círculo raio $2l$





$$\dot{\xi}_I = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = f(l, r, \theta, \dot{\phi}_1, \dot{\phi}_2) \quad \dot{\xi}_I = R(\theta)^{-1} \dot{\xi}_R$$

l = dist. roda até centro eixo (P)
 r = raio da roda
 ϕ_i = velocidade angular roda i em rad/s

Juntando deslocamento e rotação

$$\dot{\xi}_I = R(\theta)^{-1} \begin{bmatrix} \frac{r\dot{\phi}_1}{2} + \frac{r\dot{\phi}_2}{2} \\ 0 \\ \frac{r\dot{\phi}_1}{2l} + \frac{-r\dot{\phi}_2}{2l} \end{bmatrix}$$

