Universidade Federal do Paraná

Especialização em Inteligência Artificial Aplicada

Mobile Robotics

Matriz de Covariância
e
Ditância de Mahalanobis

Prof. Eduardo Todt

2019

Matriz de covariância e vetor média

Seja a matriz com 5 observações de 3 variáveis

A matriz pode ser descrita pela matriz de covariância e pelo vetor média

Cada linha é um vetor Xi de um conjunto de observações

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 4.0 & 2.0 & .60 \\ 4.2 & 2.1 & .59 \\ 3.9 & 2.0 & .58 \\ 4.3 & 2.1 & .62 \\ 4.1 & 2.2 & .63 \end{bmatrix}$$

Matriz de covariância e vetor média

Cada linha é um vetor Xi de um conjunto de observações

O vetor de médias consiste das médias de cada variável

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 4.0 & 2.0 & .60 \\ 4.2 & 2.1 & .59 \\ 3.9 & 2.0 & .58 \\ 4.3 & 2.1 & .62 \\ 4.1 & 2.2 & .63 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 4.10 & 2.08 & .604 \end{bmatrix}$$

Recorde que ...

Variância é uma medida de dispersão dos valores em torno de uma média

Matriz de covariância generaliza o conceito para conjuntos de variáveis aleatórias

Covariância entre duas variáveis é uma medida do acoplamento entre elas

Matriz de covariância e vetor média

A matriz de covariância consiste das variâncias das variáveis ao longo da diagonal principal e das covariâncias entre cada par de variáveis nas outras posições da matriz

A covariância entre duas variáveis X e Y é

$$COV = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{x})(Y_i - \bar{y})}{n-1}$$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 4.0 & 2.0 & .60 \\ 4.2 & 2.1 & .59 \\ 3.9 & 2.0 & .58 \\ 4.3 & 2.1 & .62 \\ 4.1 & 2.2 & .63 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 4.10 & 2.08 & .604 \end{bmatrix}$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \cdots & \sigma_{pp} \end{pmatrix}$$

Matriz de covariância e vetor média

A matriz de covariância consiste das variâncias das variáveis ao longo da diagonal principal e das covariâncias entre cada par de variáveis nas outras posições da matriz

n=5 no exemplo

0.025 é a variância de v1

0.0075 é a covariância entre v1 e v2

0.00175 é a covariância entre v1 e v3

0.0070 é a variância de v2

0.00135 é a covariância entre v2 e v3

0.00043 é a variância de v3

	v1	v2	v3
x1	4	2	0,6
x2	4,2	2,1	0,59
x3	3,9	2	0,58
x4	4,3	2,1	0,62
x5	4,1	2,2	0,63
medias	4,100	2,080	0,604
variancias	0,025	0,0070	0,00043
covariancias	0,0075	0,00135	0,00175
	1 e 2	2 e 3	1 e 3

$$COV = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{x})(Y_i - \bar{y})}{n-1}$$

$$\begin{array}{cccc} & v1 & v2 & v3 \\ \mathbf{X} = & \multicolumn{3}{c}{\begin{bmatrix} 4.0 & 2.0 & .60 \\ 4.2 & 2.1 & .59 \\ 3.9 & 2.0 & .58 \\ 4.3 & 2.1 & .62 \\ 4.1 & 2.2 & .63 \end{bmatrix}} \end{array}$$

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 4.10 & 2.08 & .604 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0.025 & 0.0075 & 0.00175 \\ 0.0075 & 0.0070 & 0.00135 \\ 0.00175 & 0.00135 & 0.00043 \end{bmatrix}$$

Matriz de covariância e vetor média

O vetor média é algumas vezes chamado de centróide

A matriz de covariância é algumas vezes chamada de dispersão

$$cov(X_i, X_j) = E[(X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j)]$$

$$COV = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{x})(Y_i - \bar{y})}{n - 1}$$

Mahalanobis Distance

Distância Euclideana entre dois pontos

$x = (x1, x2, \ldots, xp)^T$ e $y = (y1, y2, \ldots, yp)^T$

no espaço p-dimensional é

$dE(x,y) = SQRT((x1-y1)^2 + \ldots + (xp-yp)^2)$

$dE(x,0)$ = norma Euclidiana de x

Mahalanobis Distance

Distância de Mahalanobis entre um vetor $x = (x1, x2, ..., xp)^T$ e uma distribuição com média $u = (u1, u2, ..., up)^T$ e matriz de covariância **S** no espaço p-dimensional é

$$dM(x,u) = SQRT((x-u)^T \mathbf{S}^{-1} (x-u))$$

Mahalanobis Distance

Distância de Mahalanobis entre dois vetores

$x = (x1, x2, ..., xp)^T$ e $y = (y1, y2, ..., yp)^T$
de uma mesma distribuição com matriz de covariância **S** no espaço p-dimensional é

$dM(x,y) = SQRT((x-y)\ \mathbf{S}^{-1}\ (x-y))$

Mahalanobis Distance

Se **S** = I então temos distância Euclidiana

Se **S** = diag(**S**) temos distância Euclideana normalizada em relação à variância de cada componente no conjunto

Mahalanobis Distance

MATLAB

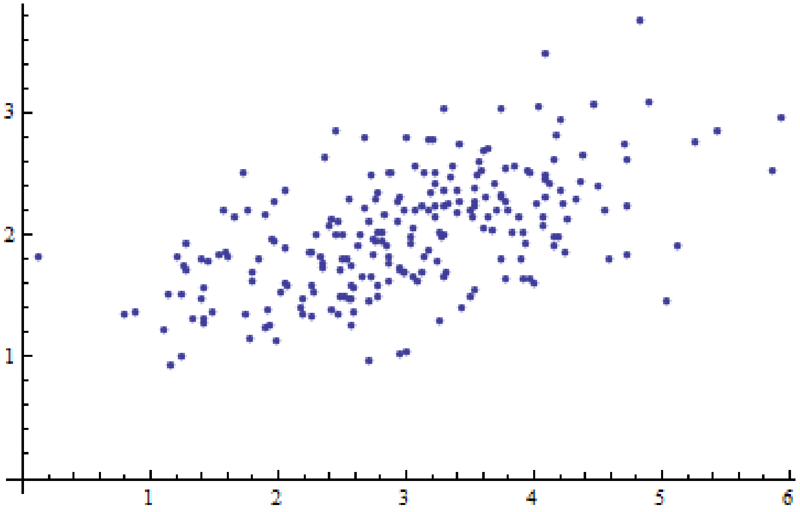
```
mahal(X,Y)
```

ou

```
S = cov(X);
mu = mean(X);
d = (Y-mu)*inv(S)*(Y-mu)‘
```

Teste type mahal; tb veja que no MATLAB mahal fornece a distância ao quadrado

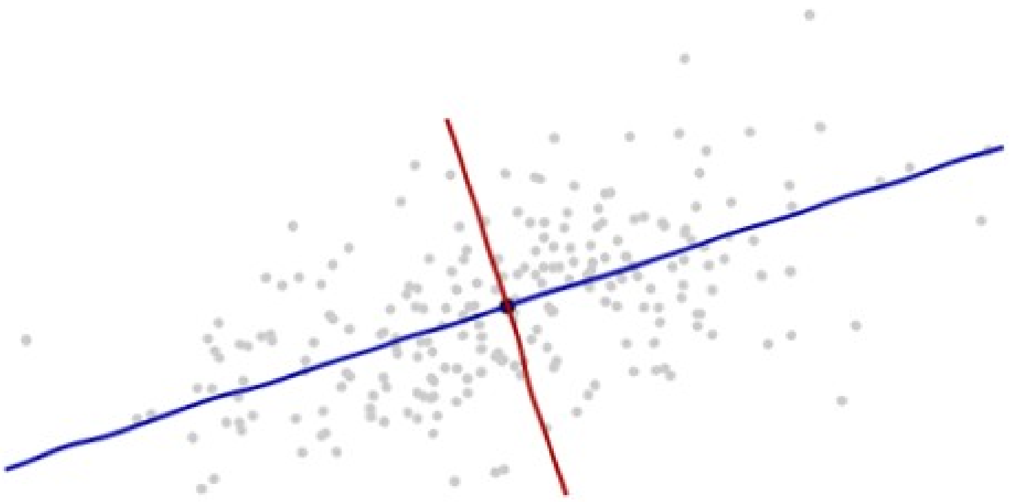
Mahalanobis Distance



Distribuição multivariada

http://stats.stackexchange.com/questions/62092

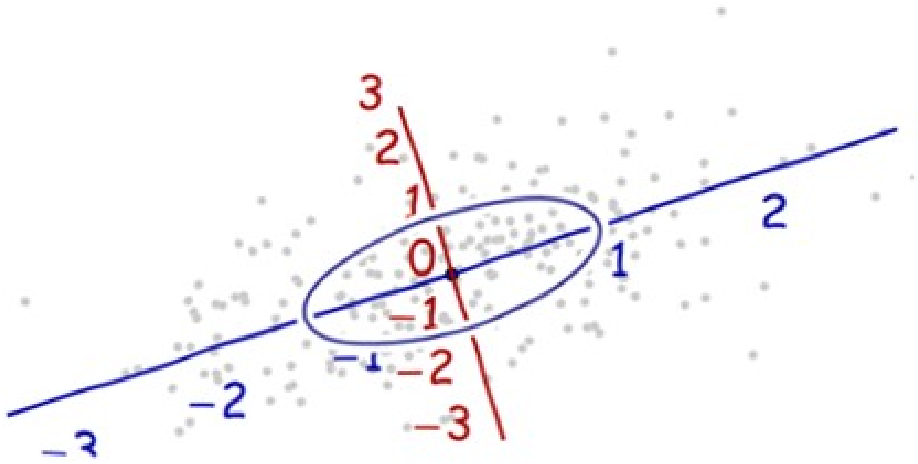
Mahalanobis Distance



Primeiro eixo (azul) na direção da maior variância
Segundo eixo (vermelho) perpendicular ao primeiro

http://stats.stackexchange.com/questions/62092

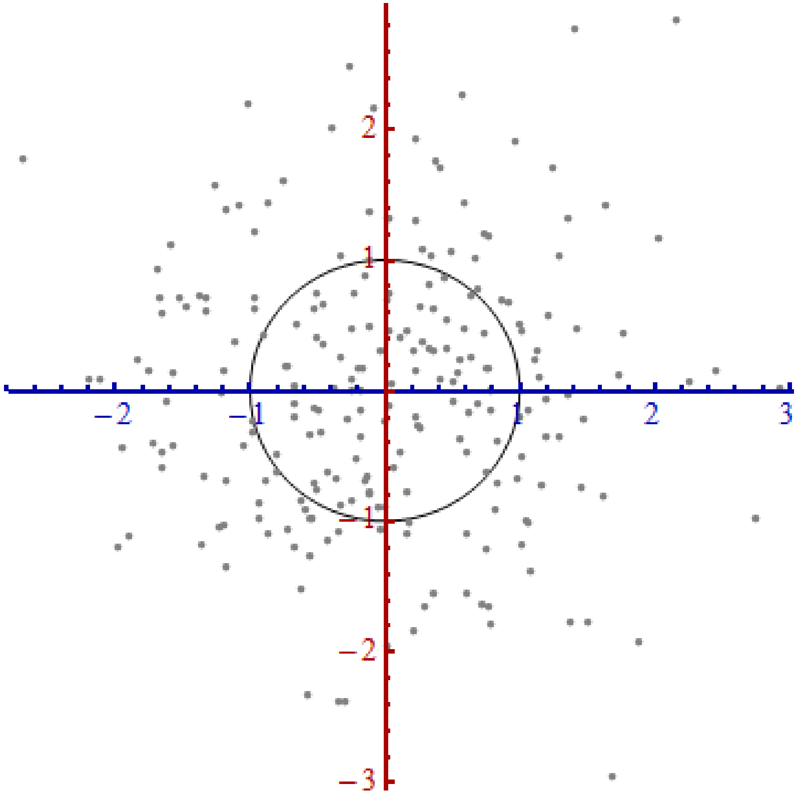
Mahalanobis Distance



Escala conforme desvios padrão (68%, 95%, 99.7%, ...)
Segundo eixo (vermelho) perpendicular ao primeiro

http://stats.stackexchange.com/questions/62092

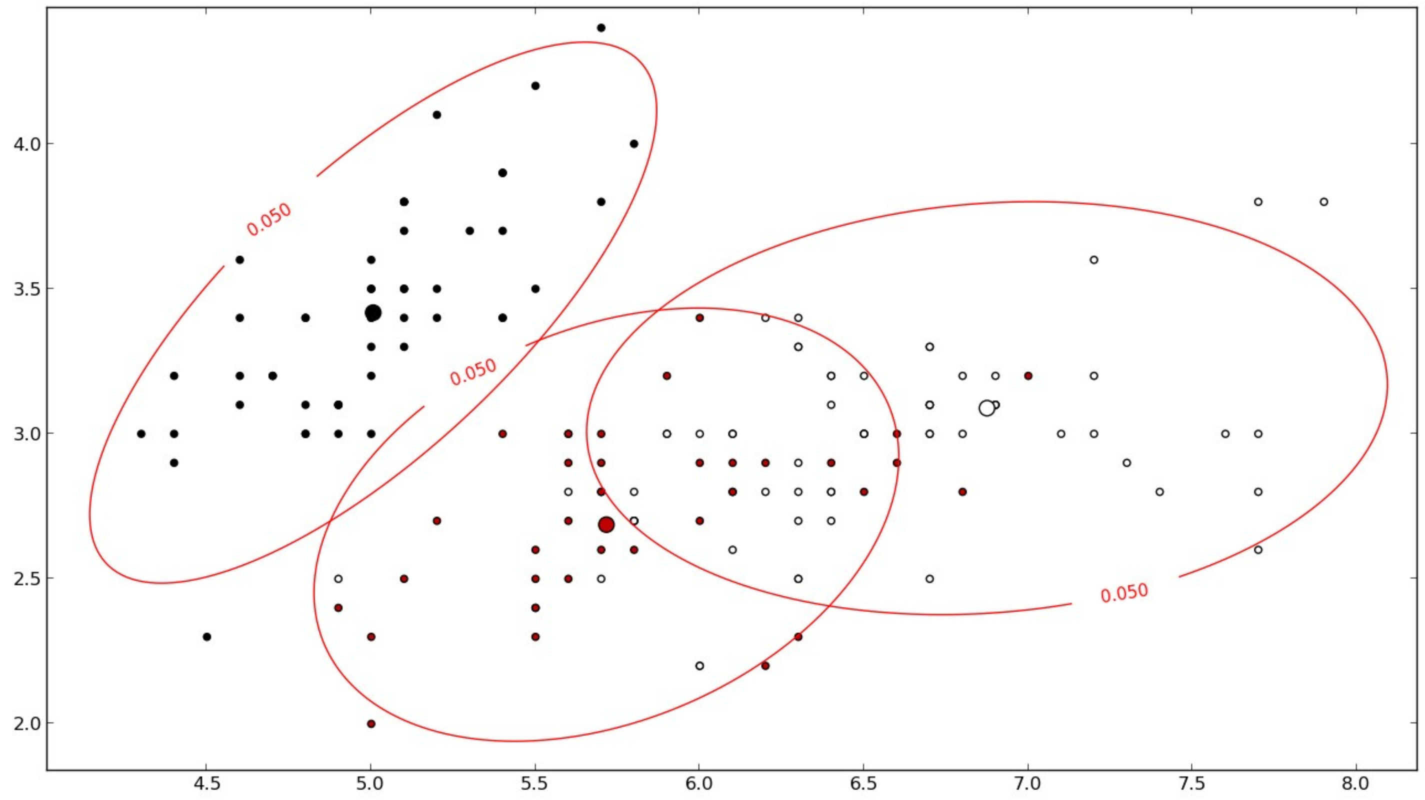
Mahalanobis Distance



Redesenhando as escalas com razão de aspecto unitário, a distância Euclideana medida no gráfico corresponde à distância de Mahalanobis

http://stats.stackexchange.com/questions/62092

Mahalanobis Distance



As elipses indicam para cada classe a mesma distância de
Mahalanobis em relação à média de cada uma; a covariância
Pode ser vista como um fator de normalização

http://stats.stackexchange.com/questions/62092