JOGOS – ESTRATÉGIAS MISTAS

Redes Sociais e Econômicas

Prof. André Vignatti

RECAPITULANDO...

- equilíbrio de Nash – ninguém tem incentivo de desviar da estratégia
- vários equilíbrios – qual será a saída?
- jogos de coordenação e anti-coordenação
- exemplos que não continham equilíbrio – qual o resultado do jogo?

ESTRATÉGIAS MISTAS

e se um jogo não tem equilíbrio de Nash?

exemplo (jogo sem equilíbrio): Jogos de Ataque ou Defesa

o atacante pode usar estratégias **A** ou **B**. O defensor pode se defender contra **A** ou **B**.

- se o defensor se protege contra o ataque correto, então ele fica com payoff alto
- se o defensor se protege contra o ataque errado, então o atacante fica com payoff alto

MATCHING PENNIES: EXEMPLO DE JOGO DE ATAQUE OU DEFESA

duas pessoas têm uma moeda cada e simultaneamente devem **optar por mostrar cara *(H)* ou coroa *(T)***

- o Jogador 1 perde sua moeda se é mostrado lados iguais das moedas
- o Jogador 2 perde sua moeda se é mostrado lados diferentes das moedas

jogo de soma zero: os payoffs somam zero em todo resultado

- em jogos de soma zero o interesse dos jogadores estão em conflito direto

		Player 2: H	Player 2: T
Player 1	H	$-1, +1$	$+1, -1$
	T	$+1, -1$	$-1, +1$

ALEATORIZAÇÃO DE ESTRATÉGIAS

matching pennies: não há equilíbrio de Nash!

vida real: os jogadores ***escondem*** a estratégia que vão escolher

iremos modelar essa situação ao **aleatorizar o comportamento** jogadores entre as estratégias de **H** e **T**

ESTRATÉGIAS MISTAS

aleatorização - os jogadores escolhem **uma probabilidade para jogar** **H** ou **T**

- Jogador 1 escolhe ***H*** com prob. $\boldsymbol{p}$, e escolhe ***T*** com prob. $\mathbf{1}-\boldsymbol{p}$
- Jogador 2 escolhe ***H*** com prob. $\boldsymbol{q}$, e escolhe ***T*** com prob. $\mathbf{1}-\boldsymbol{q}$

$$
\begin{array}{cc|c|c|}
 & & \multicolumn{2}{c}{\text{Player 2}} \\
 & & H & T \\
\hline
\text{Player 1} & H & -1,+1 & +1,-1 \\
\cline{3-4}
 & T & +1,-1 & -1,+1 \\
\hline
\end{array}
$$

ESTRATÉGIAS MISTAS

agora temos um conjunto **infinito** de estratégias (em vez de apenas duas) que corresponde ao intervalo de números entre **0** e **1**

estratégia pura: é escolher somente entre **H** ou **T** (probabilidades 0 ou 1)

		Player 2	
		H	T
Player 1	H	$-1, +1$	$+1, -1$
	T	$+1, -1$	$-1, +1$

PAYOFFS DE ESTRATÉGIAS MISTAS

		Player 2	
		H	T
Player 1	H	$-1, +1$	$+1, -1$
	T	$+1, -1$	$-1, +1$

CENÁRIO: **Jogador 2**: ***H*** com prob q, e ***T*** com prob $1-q$

suponha que Jogador 1: escolhe ***H*** (estratégia pura)

se o Jogador 1 escolhe estratégia pura ***H*** então recebe -1 com probabilidade q, e $+1$ com probabilidade $1-q$

- **valor esperado** do payoff do **Jogador 1**: $(-1)q + (1)(1-q) = 1 - 2q$

suponha que Jogador 1: escolhe **T** (estratégia pura)

- **valor esperado** do payoff do **Jogador 1**: $(1)q + (-1)(1-q) = 2q - 1$

EQUILÍBRIO COM ESTRATÉGIAS MISTAS

Equilíbrio de Nash Misto é um par de estratégias (agora **probabilidades**) de modo que cada estratégia é uma melhor resposta em relação à outra

EQUILÍBRIO COM ESTRATÉGIAS MISTAS

primeira observação:

nenhuma estratégia pura pode ser um equilíbrio de Nash

- se **Jogador 1** escolhe ***H*** (pura) então para o **Jogador 2** ***H*** é a única melhor resposta
- assim, ***H*** não é a melhor resposta para **Jogador 1**

(o raciocínio é análogo para os demais casos)

		Player 2	
		H	T
Player 1	H	$-1, +1$	$+1, -1$
	T	$+1, -1$	$-1, +1$

EQUILÍBRIO COM ESTRATÉGIAS MISTAS

se **Jogador 1** escolhe **H** $\Rightarrow$ payoff esperado é $\mathbf{1-2q}$

se **Jogador 1** escolhe **T** $\Rightarrow$ payoff esperado é $\mathbf{2q-1}$

se $\mathbf{1-2q > 2q-1}$ então é melhor **Jogador 1** escolher **H**

- não há motivos para **Jogador 1** colocar probabilidade positiva na sua estratégia fraca (no caso, **T**)

se $\mathbf{1-2q < 2q-1}$ então é melhor **Jogador 1** escolher **T**

- não há motivos para **Jogador 1** colocar probabilidade positiva na sua estratégia fraca (no caso, **H**)

mas estratégias puras não formam equilíbrio de Nash!

EQUILÍBRIO COM ESTRATÉGIAS MISTAS

então, se existir equilíbrio, é quando $1 - 2q = 2q - 1$

caso contrário, uma das estratégias puras ***H*** ou ***T*** seria a única melhor resposta

- **isolando a variável: $1 - 2q = 2q - 1 \Rightarrow q = ½$.**

EQUILÍBRIO COM ESTRATÉGIAS MISTAS

o que acontece se o **Jogador 2** escolher $\boldsymbol{q} = ½$?

suponha que o Jogador 2 escolhe com probabilidade ½ cada estratégia:

- $\mathbf{Pr_2(Cara)} = ½, \ \ \mathbf{Pr_2(Coroa)} = ½$
- $\mathbf{Pr_1(Cara)} = \boldsymbol{p}, \ \ \mathbf{Pr_1(Coroa)} = \mathbf{1} - \boldsymbol{p}$

o **payoff esperado** do Jogador 1 é:

$$(+\mathbf{1})\ ½\boldsymbol{p} + (-\mathbf{1})\ ½(\mathbf{1} - \boldsymbol{p}) + (-\mathbf{1})\ ½\boldsymbol{p} + (+\mathbf{1})\ ½(\mathbf{1} - \boldsymbol{p}) = \mathbf{0}$$

ou seja, **qualquer estratégia** selecionada pelo Jogador 1 tem payoff ***0***

- *Jogador 1* **não tem incentivos de mudar de estratégia**

INDIFERENÇA

a escolha de $q = 1/2$ pelo Jogador 2 faz com que o Jogador 1 fique **indiferente** entre jogar ***H*** ou ***T***

- assim ele pode jogar **qualquer combinação entre** ***H*** e ***T***, incluindo $p = 1/2$

como o jogo é simétrico, se Jogador 1 escolhe $p = 1/2$, o Jogador 2 fica **indiferente**

- assim ele pode jogar **qualquer combinação entre** ***H*** e ***T***, incluindo $q = 1/2$

portanto, $p = 1/2$ e $q = 1/2$ formam um **Equilíbrio de Nash misto**

EQUILÍBRIO MISTO

cada jogador quer que seu comportamento seja imprevisível para o outro

interpretações de equilíbrios de estratégia mista:

- **tênis** - jogador decide onde aleatoriamente vai jogar a bola
- **jogar cartas** - aleatoriamente decide se blefa ou não
- **matching pennies** - parece intuitivo acreditar que um adversário vai jogar com probabilidade $^1/_2$

EXISTÊNCIA DE EQUILÍBRIO DE NASH MISTO

Teorema (Nash'51): Todo jogo com número finito de jogadores e estratégias possui um equilíbrio de Nash com estratégias mistas

OK, existe… mas **qual é** a estratégia de equilíbrio?

en.wikipedia.org/wiki/PPAD_(complexity)

OTIMALIDADE SOCIAL

Equilíbrio de Nash: os jogadores otimizam individualmente

e se quisermos um resultado que é "**bom para a sociedade**"?

a escolha de estratégias é um maximizador do ***bem-estar social*** (ou ***ótimo social***) se **maximiza a soma dos payoffs** dos jogadores

às vezes, alcançar o OS não é possível sem um acordo mútuo

		Your Partner	
		Presentation	*Exam*
You	*Presentation*	90, 90	86, 92
	Exam	92, 86	88, 88