



MERCADOS DE EMPARELHAMENTO

Redes Sociais e Econômicas

Prof. André Vignatti

MERCADOS DE EMPARELHAMENTO

mercados - interação econômica entre pessoas numa rede estruturada

mercados de emparelhamento modelam:

- pessoas com **preferências diferentes** para **diferentes bens**
- como os **preços** podem **descentralizar a atribuição de bens** para as pessoas
- como esses **preços** podem levar a **atribuições ótimas**

PROBLEMA DO EMPARELHAMENTO BIPARTIDO

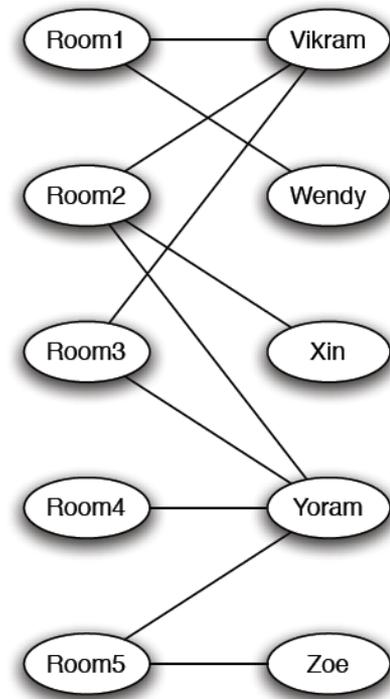
casa de estudantes: atribuir quartos a novos estudantes

- cada quarto cabe **um único aluno**
- cada aluno faz uma **lista com os quartos** que eles gostariam
- os alunos podem ter **preferências diferentes** sobre quartos:
 - alguns preferem salas maiores, salas mais silenciosas, mais ensolaradas, ...

PROBLEMA DO EMPARELHAMENTO BIPARTIDO

grafo bipartido - nós são divididos em duas categorias, aresta conecta um nó em uma categoria a um nó da outra categoria

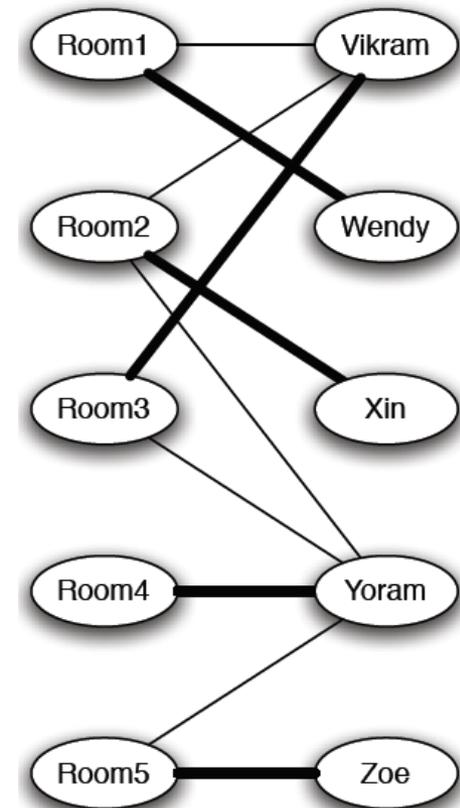
- um nó para cada aluno, um nó para cada quarto
- aresta entre um aluno e um quarto se o aluno listou o quarto como uma opção



EMPARELHAMENTO PERFEITO

emparelhamento perfeito: dado um grafo bipartido com partições de tamanhos iguais, um *emparelhamento perfeito* é uma atribuição dos nós da esquerda para nós da direita, tal que:

todo nó está ligado exatamente a um único outro nó



EMPARELHAMENTO PERFEITO

atribuir alunos a quartos é na verdade encontrar um emparelhamento perfeito

um **emparelhamento perfeito** pode ser visto como uma **escolha de arestas** de forma que **todo nó é ponta de exatamente uma das arestas** escolhidas

CONJUNTOS RESTRITOS

se um grafo bipartido **tem** um emparelhamento perfeito, **é fácil verificar isso**: basta *indicar as arestas que formam o emparelhamento perfeito*

mas e se **não existe** um emparelhamento perfeito?

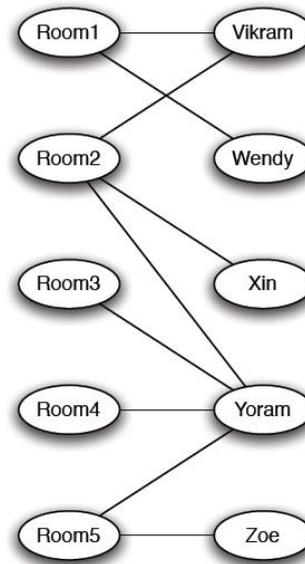
como você poderia mostrar a alguém que **não há** um?

1ª ideia natural: olhar **todas as possibilidades** e mostrar que nenhuma é emparelhamento perfeito

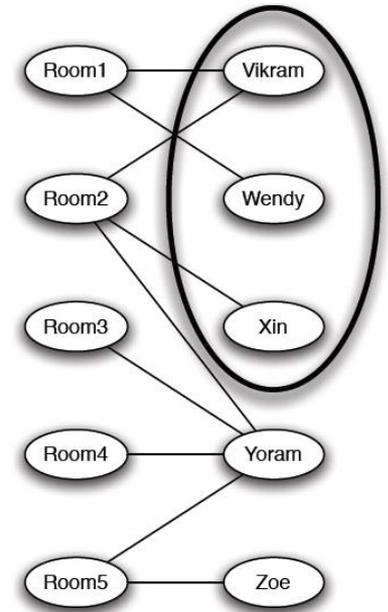
no entanto, há uma *maneira mais simples...*

CONJUNTOS RESTRITOS

na **figura da esquerda**, *não há emparelhamento perfeito*



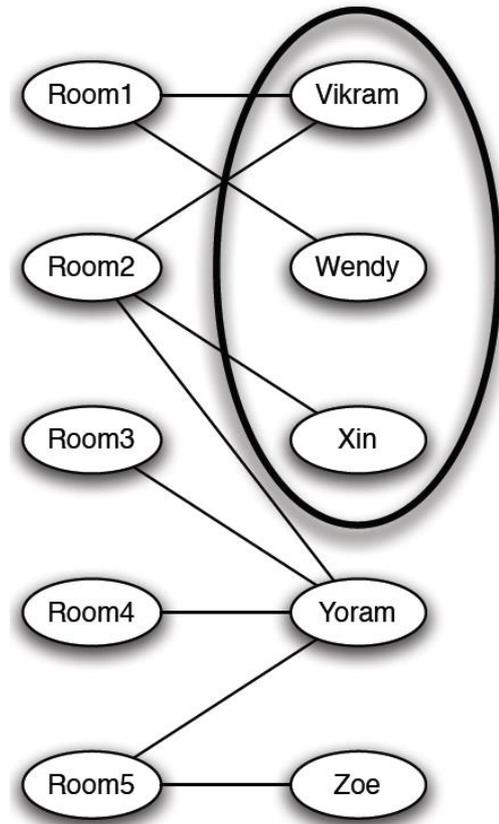
na **figura da direita**, há uma **explicação** mais clara do porquê:



- o conjunto (*Vikram, Wendy, e Xin*) só tem **duas opções de quartos** disponíveis
- assim, *não há como encontrar um emparelhamento perfeito* nesse grafo
- o conjunto dos três estudantes é chamado de **conjunto restrito**, pois restringem a formação de um emparelhamento perfeito

CONJUNTOS RESTRITOS

- S : um conjunto de nós do lado direito
- **vizinho de S** : nó do lado esquerdo que tem aresta para algum nó de S
- **conjunto de vizinhos: $N(S)$**
- S é restrito se $|S| > |N(S)|$



TEOREMA DO EMPARELHAMENTO

se **existe um conjunto restrito**, então sabemos que **não há emparelhamento perfeito** (porque?)

então, a presença de um conjunto restrito **é um obstáculo** para existir um emparelhamento perfeito

- **o que não é óbvio:** a presença de um conjunto restrito é o **ÚNICO obstáculo** para ter um emparelhamento perfeito:

Teorema de Emparelhamento: se um grafo bipartido (partições de mesmo tamanho) não tem emparelhamento perfeito, então tem um conjunto restrito

TEOREMA DO EMPARELHAMENTO

sem o teorema, poderíamos imaginar que **não haveria emparelhamento perfeito** pelas **mais diversas razões**

- algumas razões talvez fossem **complicadas demais para explicar**

para os nossos propósitos neste curso, **vamos assumir que o Teorema do Emparelhamento é verdade**, sem ver a sua prova (ver material avançado no fim do capítulo)

nos **alunos e dormitórios**: alocação perfeita não é possível se existe *um conjunto de alunos que deram poucas opções de quartos*

VALORAÇÕES E ATRIBUIÇÕES ÓTIMAS

o problema do emparelhamento bipartido modela um **mercado muito simples**:

- indivíduos expressam suas **preferências** (de **forma binária** “aceita ou não aceita”)
- emparelhamento perfeito *aloca objetos de acordo com as preferências*
- se não há um emparelhamento perfeito, é devido a uma **“restrição”**

vamos **estender esse modelo**: supor que o indivíduo possa expressar **o quanto ele gostaria de cada objeto** de forma numérica

VALORAÇÕES E ATRIBUIÇÕES ÓTIMAS

por exemplo, as avaliações de **Xin** para os quartos 1, 2 e 3 são **12, 2 e 4**, respectivamente

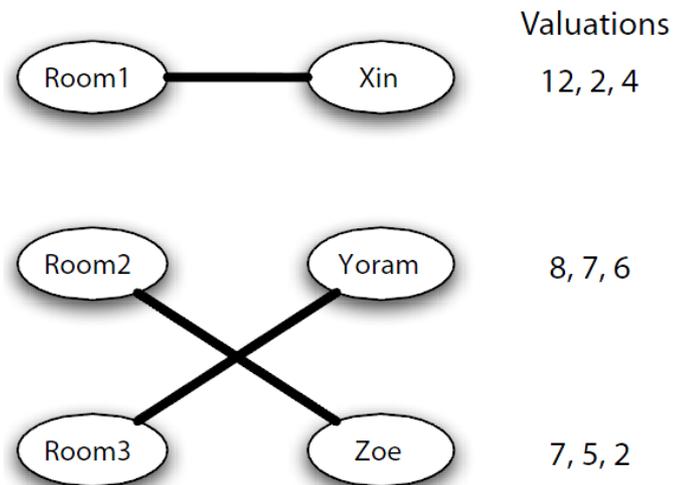
observe que os alunos podem **discordar sobre quais quartos são melhores**, e a discordância pode ser “medida”

		Valuations
Room1	Xin	12, 2, 4
Room2	Yoram	8, 7, 6
Room3	Zoe	7, 5, 2

(a) *A set of valuations*

VALORAÇÕES E ATRIBUIÇÕES ÓTIMAS

a **qualidade de uma atribuição** de objetos a indivíduos - é a **soma da valoração** de cada indivíduo sobre o objeto a ele atribuído



na figura: a **qualidade** é $12 + 6 + 5 = 23$

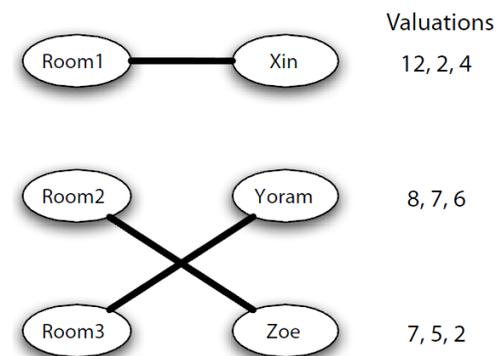
(b) *An optimal assignment*

VALORAÇÕES E ATRIBUIÇÕES ÓTIMAS

atribuição ótima: atribuição que maximiza a “felicidade” total de todos

- a atribuição ótima é uma **generalização do emparelhamento máximo** (o emp. máx. é um caso particular)
- diferente do emparelhamento máximo, é **muito menos óbvio** achar uma **caracterização (\Leftrightarrow) para a atribuição ótima (mas existe um algoritmo)**

na figura: a **qualidade** é
 $12 + 6 + 5 = 23$



(b) *An optimal assignment*

PREÇOS E A PROPRIEDADE DE EQUILÍBRIO DE MERCADO

até agora, um “**administrador central**” determina o emparelhamento perfeito ou uma alocação ótima

mercados reais têm *menos coordenação central*: indivíduos decidem baseados em PREÇOS e suas valorações

problema: muitos querem o mesmo item, então a atribuição fica ruim

solução: um *esquema de dar preços aos itens*

- assim basta os indivíduos seguirem seus próprios interesses baseados nas valorações, e eles produzirão atribuições ótimas

PREÇOS E PAYOFFS

vamos ver uma situação mais adequada para falar de equilíbrio de mercado:

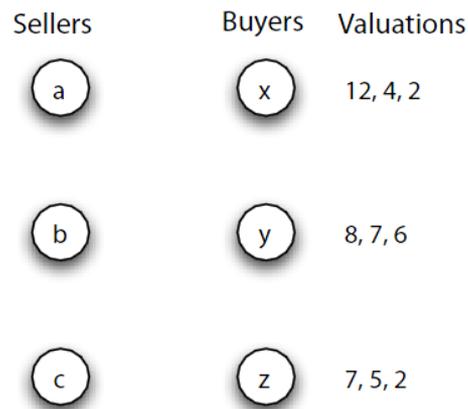
- **conjunto de vendedores** (estão vendendo casas)
- **conjunto de compradores**
 - comprador j tem uma **valoração do item** do vendedor i : v_{ij}
 - cada vendedor i coloca seu item à venda pelo **preço** $p_i \geq 0$
- **payoff do comprador** = $v_{ij} - p_i$. Assim, os compradores querem **maximizar** $v_{ij} - p_i$

se $v_{ij} - p_i < 0$, o *comprador prefere não comprar* (então payoff = 0)

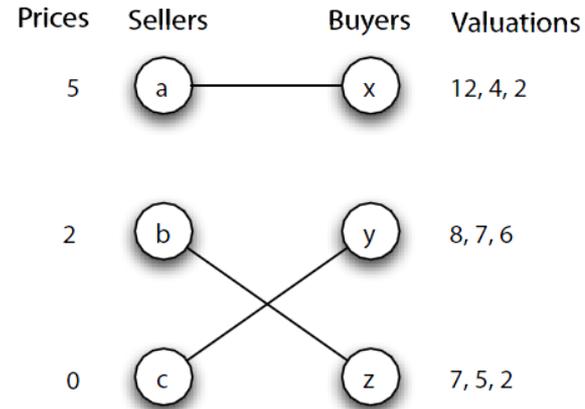
o comprador tem **vendedores preferidos** - aqueles que maximizam seu payoff

PREÇOS E PAYOFFS

vendedores **a, b e c** e compradores **x, y, z**



(a) *Buyer Valuations*



(b) *Market-Clearing Prices*

no **grafo da direita**, as atribuições mostradas estão **maximizando os payoffs** de todos os compradores

esse é o **grafo de vendedores-preferidos** para esse conjunto de preços

- para **outro conjunto de preços**, a **atribuição no grafo poderia mudar**

PREÇOS DE EQUILÍBRIO DE MERCADO

um conjunto de preços é de “**equilíbrio de mercado**” se o *grafo de vendedores preferidos* tem um emparelhamento perfeito

a **figura (b)** tem uma **propriedade boa**: se cada comprador quer a casa que mais gosta, então *cada comprador fica com uma casa diferente*:

- de alguma forma **os preços resolveram perfeitamente a disputa** pelas casas

o termo “*equilíbrio de mercado*” vem do fato que cada casa é comprada por um *comprador diferente*

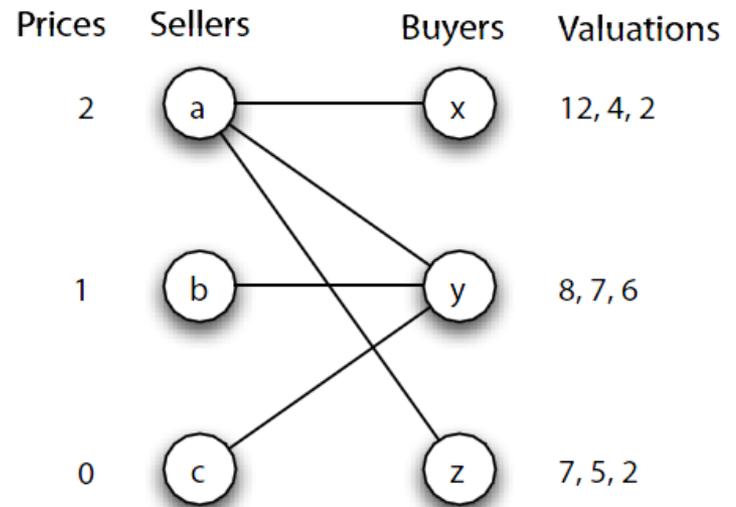
PREÇOS DE EQUILÍBRIO DE MERCADO

em contraste, a **Figura (c)** mostra um exemplo de preços que **não são de equilíbrio de mercado**

os compradores x e z ambos querem a casa do vendedor a

assim, o **conflito de casas não é resolvido**

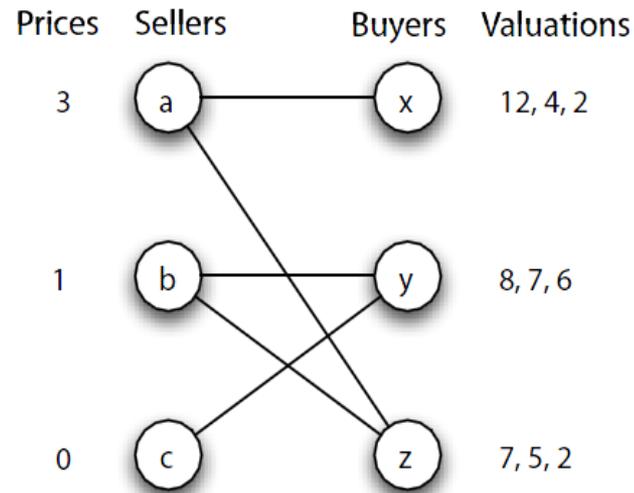
mesmo y tendo **várias opções** (preço com payoff iguais), isso não ajuda com a disputa entre x e z (que formam um **conjunto restrito**)



(c) *Prices that Don't Clear the Market*

PREÇOS DE EQUILÍBRIO DE MERCADO

Figura (d) ilustra uma **sutileza a mais** na noção de equilíbrio de mercado



(d) *Market-Clearing Prices (Tie-Breaking Required)*

aqui, **existe um emparelhamento perfeito**, mas os compradores precisam **conversar entre si** para decidir a melhor alocação

PREÇOS DE EQUILÍBRIO DE MERCADO

neste caso, como é possível eliminar os conflitos (**precisa de um pouco de coordenação**), diremos que esse conjunto de preços é **também de equilíbrio de mercado**

em alguns casos, **equilíbrio de mercado dessa forma são inevitáveis**

por exemplo, **se todos os compradores têm a mesma valoração para tudo**, então **não há escolha de preços que vai quebrar essa simetria**

PROPRIEDADES DOS PREÇOS DE EQUILÍBRIO DE MERCADO

no exemplo visto, há um modo de definir os preços para alcançar o equilíbrio de mercado

será que isso funciona para qualquer exemplo?

existência de equilíbrio de mercado: para qualquer conjunto de valorações dos compradores, existe um conjunto de preços de equilíbrio de mercado

essa propriedade está **longe de ser óbvia**

- iremos mostrar um **método para construir os preços** de equilíbrio de mercado
- como consequência deste método, iremos **provar que tais preços sempre existem**

PROPRIEDADES DOS PREÇOS DE EQUILÍBRIO DE MERCADO

sabemos que os preços de equilíbrio **sempre existem**

- isso irá **resolver o problema de conflitos** nas compras

será que tais preços resultam em uma **boa atribuição?**

otimalidade de equilíbrio de mercado: para *qualquer conjunto de preços de equilíbrio de mercado*, um emparelhamento perfeito no grafo vendedores preferidos tem a **valoração máxima total** de qualquer atribuição possível de vendedores a compradores

vamos demonstrar isso...