



# MERCADOS DE EMPARELHAMENTO

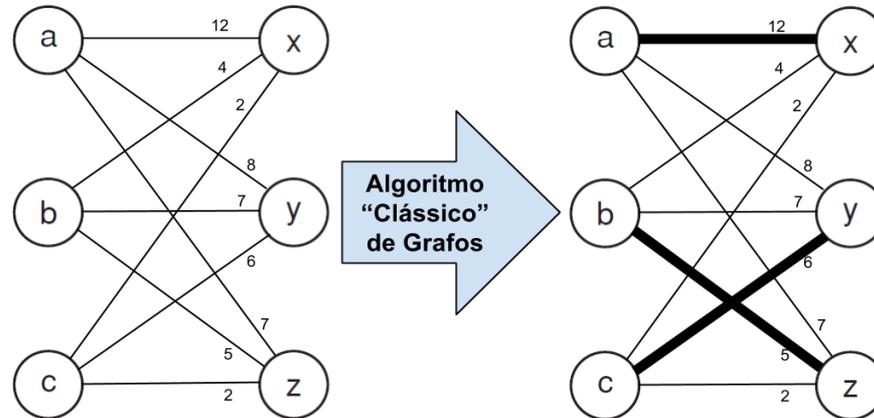
Redes Sociais e Econômicas

Prof. André Vignatti

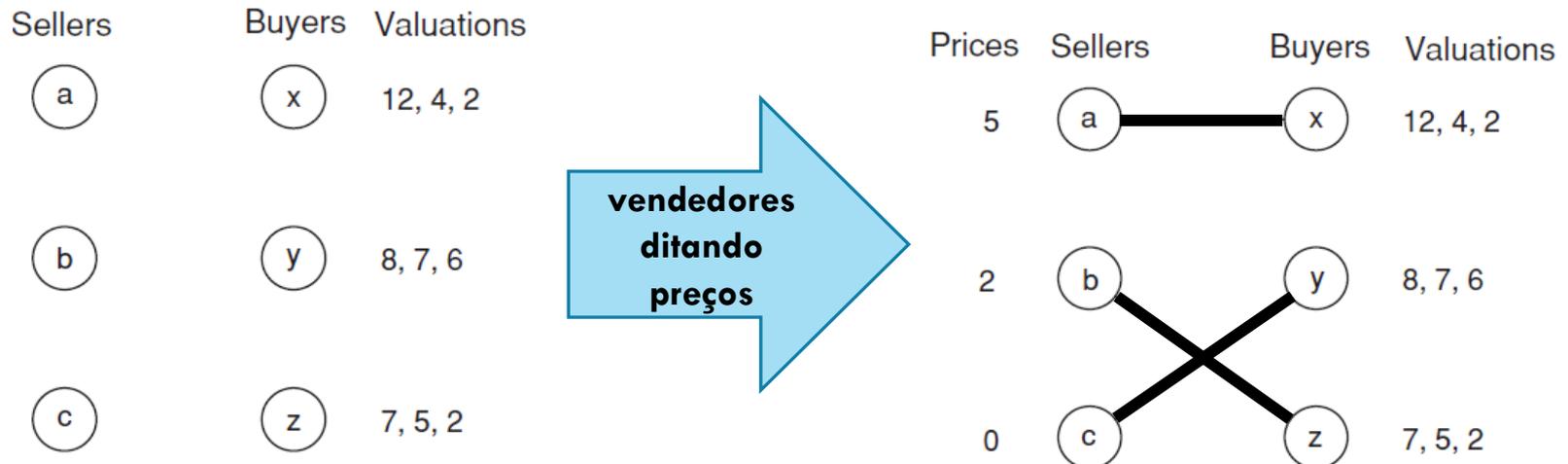
# AULA PASSADA

1. **definições:** grafos bipartidos e emparelhamentos perfeitos
2. mercados com **opções binárias** (aceita ou não)
  - i. extensão para mercados com **opções valoradas**
3. algoritmos que obtém a solução máxima:
  - i. de quebra, **conseguem resolver conflitos**
  - ii. mas, devido a serem **soluções centralizadas**, não podem ser usados em mercados reais
4. **solução:** os vendedores colocam **preços**
  - i. é mais **próximo de situações reais** de mercado
  - ii. grafo de vendedores preferidos
  - iii. **preços de equilíbrio de mercado** = todos conflitos resolvidos (emp. perfeito no grafo de vendedores preferidos)

## Teoria dos Grafos “Clássica”:



## Mercados e Preços de Equilíbrio:



# OTIMALIDADE DOS PREÇOS DE EQUILÍBRIO DE MERCADO

a figura anterior é coincidência?

preços de equilíbrio de mercado resultam em uma **boa atribuição**?

otimalidade de equilíbrio de mercado: para *preços de equilíbrio de mercado*, um emparelhamento perfeito no grafo vendedores preferidos tem a **valoração máxima total** de qualquer atribuição possível de vendedores a compradores

vamos demonstrar isso

# OTIMALIDADE DOS PREÇOS DE EQUILÍBRIO DE MERCADO

prova da otimalidade de equilíbrio de mercado:

- seja  $M$  um **emparelhamento perfeito** no grafo dos preços de equilíbrio de mercado
- **payoff total**: soma dos payoffs de todos compradores
- cada comprador **maximiza individualmente seu payoff**, então  $M$  tem o payoff máximo de qualquer atribuição de casas aos compradores
- **payoff do comprador  $j$** :  $v_{ij} - p_i$

# OTIMALIDADE DOS PREÇOS DE EQUILÍBRIO DE MERCADO

prova da otimalidade de equilíbrio de mercado (cont.):

- **payoff Total de  $M$  = valorção Total de  $M$  - soma de Todos os Preços**
- **mas a soma de todos os preços nunca muda** (não depende do emparelhamento escolhido)
- **assim, o emparelhamento que maximiza o payoff total é o que vai maximizar a valorção total**
- isso completa o argumento

uma prova mais formal:  
<https://arxiv.org/pdf/1912.00786.pdf>

# PROPRIEDADES DOS PREÇOS DE EQUILÍBRIO DE MERCADO

se pensarmos não só sobre a maximização dos payoff dos compradores, mas sobre todos os participantes: compradores e vendedores

- payoff total dos **compradores** = valoração total – soma de todos os preços
- payoff total dos **vendedores** = soma de todos os preços
- payoff total (vendedores e compradores) = valoração total

# OTIMALIDADE DOS PREÇOS DE EQUILÍBRIO DE MERCADO

**otimalidade de equilíbrio de mercado (versão equivalente):**

**preços de equilíbrio de mercado, e um emparelhamento perfeito no grafo resultante, produz a soma máxima possível de payoffs aos vendedores e compradores**

# EXISTÊNCIA DOS PREÇOS DE EQUILÍBRIO DE MERCADO

existência de equilíbrio de mercado: para qualquer conjunto de valorações dos compradores, existe um conjunto de preços de equilíbrio de mercado

essa propriedade está **longe de ser óbvia**

- iremos mostrar um **método para construir os preços de equilíbrio de mercado**
- como consequência deste método, iremos **provar que tais preços sempre existem**

# PREÇOS DE EQUILÍBRIO DE MERCADO SEMPRE EXISTEM

estratégia para mostrar que os preços de equilíbrio **existem**:

1. dados **compradores e suas valorações**:
  - descreveremos um **procedimento** (que é um **leilão**) para colocar preços
  - tal procedimento **para** somente quando alcança os **preços de equilíbrio de mercado**
2. vamos mostrar que **tal procedimento sempre termina**

# OBTENDO PREÇOS DE EQUILÍBRIO DE MERCADO

procedimento (leilão) que alcança equilíbrio de mercado:

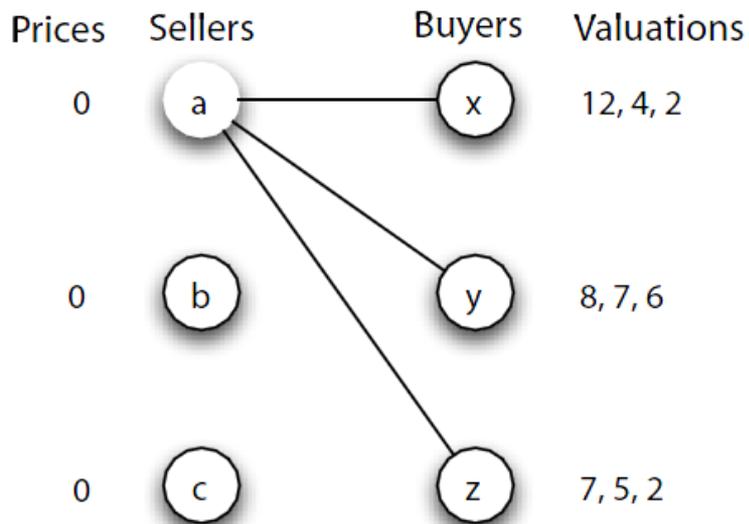
- 1) **no início**, há preços, com o **menor preço igual a 0**
- 2) construir o **grafo de vendedores preferidos** e **verificar se existe um emparelhamento perfeito**
- 3) **se existe, OK**: os preços atuais são de equilíbrio de mercado
- 4) **se não existe**, encontrar **conjunto restrito  $S$**  de compradores e seus vizinhos  $N(S)$
- 5) cada vendedor em  $N(S)$  simultaneamente **eleva o seu preço em uma unidade**
- 6) comece a próxima rodada do leilão com estes novos preços

# OBTENDO PREÇOS DE EQUILÍBRIO DE MERCADO

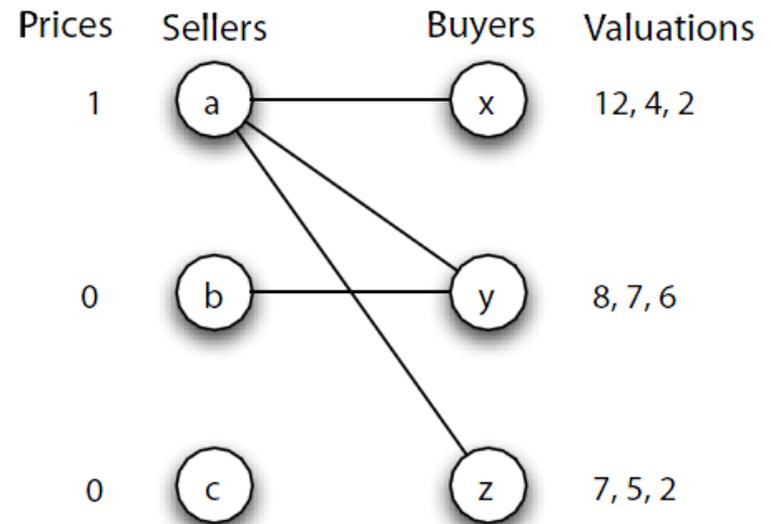
**observação:** é útil manter os preços em uma escala onde o menor preço começa com **0**

para fazer isso, se o menor preço  $p > 0$ , basta subtrair todos os outros preços por  $p$

# OBTENDO PREÇOS DE EQUILÍBRIO DE MERCADO: EXEMPLO

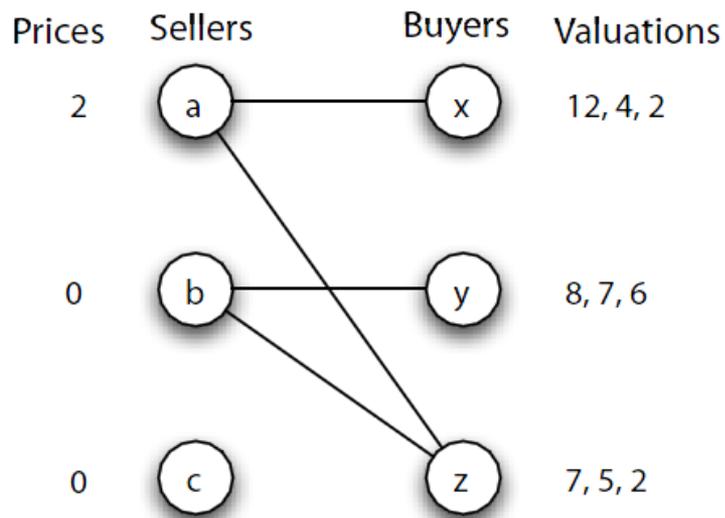


(a) *Start of first round*

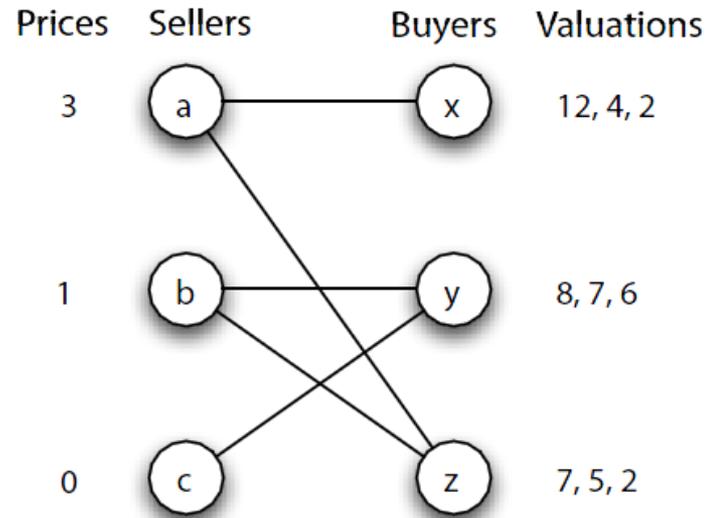


(b) *Start of second round*

# OBTENDO PREÇOS DE EQUILÍBRIO DE MERCADO: EXEMPLO



(c) *Start of third round*



(d) *Start of fourth round*

# MOSTRANDO QUE O LEILÃO TERMINA

a **única maneira terminar**: se atingir um conjunto de preços de equilíbrio de mercado (passo 3)

“**energia potencial**” - vai “drenando” do leilão a medida que é ele executado:

- **potencial de um comprador**: payoff máximo que ele pode obter
- **potencial de um vendedor**: seu preço atual
- **potencial do leilão** = potenciais dos compradores + potenciais dos vendedores

**observação**: o potencial dos compradores é  $> 0$  e o potencial dos vendedores é  $> 0$   
portanto, o potencial do leilão é sempre  $> 0$

# MOSTRANDO QUE O LEILÃO TERMINA

o potencial vai sendo “drenado” em etapas:

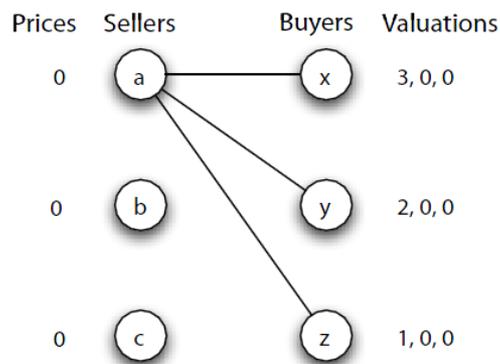
- no passo 5, os **vendedores aumentam os preços**
  - o potencial de cada **comprador** em  $S$  diminui 1 unidade
  - o potencial de cada **vendedor** em  $N(S)$  aumenta 1 unidade
- mas,  $N(S) < S$  (pois é conjunto restrito)
- assim, **o potencial do leilão diminui pelo menos uma unidade**
- ele não pode diminuir para sempre! (pois o potencial do leilão é  $> 0$ )

portanto, **alguma hora ele pára**

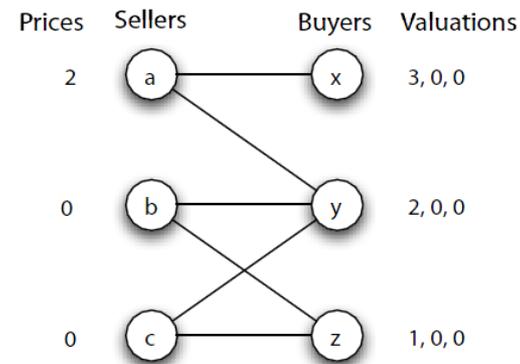
# RELAÇÃO COM LEILÕES DE 2º PREÇO

leilões de 2º preço:  $n$  compradores e 1 vendedor

- adicionamos  $n - 1$  **vendedores artificiais** com preço **0**, e **valorações artificiais dos compradores 0**
- a medida que o vendedor real aumenta o preço, os **compradores vão abandonando** (seus vendedores preferidos acabam sendo os vendedores artificiais)
- o último comprador vai **comprar com o preço do 2º maior** (pois o emparelhamento perfeito é obtido justamente quando o comprador com a segunda maior valoração desiste)



(a) *Start of the Auction*



(b) *End of the Auction*