Ordenação: Inserção

Ordenação

Ordenar é rearranjar um conjunto de objetos em ordem ascendente ou descendente.

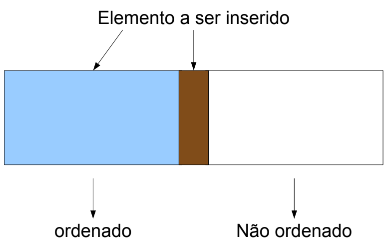
i	1	2	3	4	5	6
v[i]	42	15	23	8	4	16
v[i]	4	8	15	16	23	42

Tabela 1: vetor e sua ordenação

O objetivo da ordenação é organizar dados, facilitar a manipulação destes.

Problema: "Ordenação"	
Instância:	(v,a,b), onde v é um vetor indexado por [a..b]
Resposta:	o vetor v modificado de tal forma que v[a..b] é um vetor ordenado

Ordenação por Inserção



i	1	2	3	4	5	6
v[i]	42	**15**	23	8	4	16
	15	42	**23**	8	4	16
	15	23	42	**8**	4	16
	8	15	23	42	**4**	16
	4	8	15	23	42	**16**
	4	8	15	16	23	42

Tabela 2: passo-a-passo da Ordenação por Inserção

Ordena$_i$(v,a,b)

```
Se a ≥ b
    Devolva v
Ordena(v, a, b − 1)
Insere(v, a, b)
Devolva v
```

onde Insere(v, a, b) é uma solução para o seguinte problema computacional.

Inserção em Vetor Ordenado

Instância: (v, a, b) onde $v[a..b-1]$ é um vetor ordenado.
Resposta: o vetor v modificado de tal forma que $v[a..b]$ é um vetor ordenado.

Análise

$C(n)$: comparações com elementos do vetor de Ordena$_i$(v,a,b) em vetor de tamanho n.

Temos do algoritmo:

$$C(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n \leq 1 \\ C(n-1) + C_I(n), & \text{se } n > 1 \end{cases}$$

onde $C_I(n)$ é o número de comparações de Insere(v, a, b) em vetor de tamanho n

Resolvendo a Recorrência

$$\begin{aligned} C(n) &= C(n-1) + C_I(n) \\ &= C(n-2) + C_I(n-1) + C_I(n) \\ &= C(n-3) + C_I(n-2) + C_I(n-1) + C_I(n) \\ &\ \vdots \\ &= C(n-k) + \sum_{i=0}^{k-1} C_I(n-i) \end{aligned}$$

Quando chega na base? Quando $n-k=1$, ou seja, $k=n-1$. Substituindo na recorrência:

$$\begin{aligned} C(n) &= C(n-k) + \sum_{i=0}^{k-1} C_I(n-i) \\ &= C(1) + \sum_{i=0}^{(n-1)-1} C_I(n-i) \\ &= \sum_{i=0}^{n-2} C_I(n-i) \\ &= \sum_{i=2}^{n} C_I(i). \end{aligned}$$

Até aqui só vimos o custo do laço, falta a inserção propriamente dita.

Inserção

Insere(v,a,b)

```
p ← Busca(v[b], v, a, b − 1)
i ← b
Enquanto i > p + 1
    Troca(v, i, i − 1)
    i ← i − 1
Devolva v
```

onde Busca(x, v, a, b) é uma solução para o problema de Busca em Vetor Ordenado e Troca(v, a, b) é

Troca(v,a,b)

```
x ← v[a]
v[a] ← v[b]
v[b] ← x
```

Seja C_B as comparações feitas pela Busca. Note que

$$C_I(n) = C_B(n-1).$$

Lembrando das aulas passadas:

$$\begin{aligned} C_B^+(k) &= k, \\ C_B^-(k) &= 1 \end{aligned}$$

Pior caso

$$\begin{aligned} C^+(n) &= \sum_{i=2}^{n} C_I^+(i) \\ &= \sum_{i=2}^{n} C_B^+(i-1) \\ &= \sum_{i=2}^{n} (i-1) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} i. \end{aligned}$$

Pelo somatório de Gauss, $\sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}$, e substituindo na equação,

$$C^+(n) = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2-n}{2} \sim \frac{n^2}{2}.$$

Melhor caso

$$\begin{aligned} C^-(n) &= \sum_{i=2}^{n} C_I^-(i) \\ &= \sum_{i=2}^{n} C_B^-(i-1) \\ &= \sum_{i=2}^{n} 1 \\ &= n-1. \end{aligned}$$