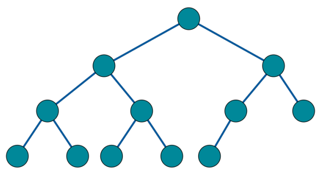
Árvores Binárias (Quase) Completas

André Vignatti

Árvore: abstração de uma estrutura hierárquica (tipo abstrato de dados)

- nodos (nós, vértices): elementos da árvore (podem ser rotulados ou não)
- árvores podem ser enraizadas ou não
- raiz: início de hierarquia
- pai de um nó: o ancestral imediato na hierarquia
- filho de um nó: descendente imediato do nó na hierarquia
- folha: nó sem filho



- nível k: nós com k ancestrais até a raiz.
- altura da árvore: quantidade de níveis
- altura de um nó: distância do nó até a folha mais longe
- árvore binária: todo nó tem no máximo dois filhos
- árvore binária completa: todo nível é completamente preenchido

Uma árvore binária de profundidade h é **quase completa** se:

1. É uma árvore binária completa até o nível $h-1$.
2. No nível h, (o último nível), se um nó está presente, então todos os nós à esquerda desse nó também devem estar presentes.

Propriedades de Árvores Binárias (Quase) Completas

Teorema. *O número de nós no nível k de uma árvore binária completa é 2^k.*

Demonstração. O nível 0 (raiz) tem 1 nó. Todo nó não folha tem dois filhos. Então, a cada nível, o número de nós dobra em relação ao nível anterior. □

Seja n o número de nós de uma árvore e h a sua altura.

Teorema. *Em uma árvore binária completa, $n = 2^{h+1} - 1$.*

Demonstração. A quantidade de nós é igual a soma de nós em cada nível, i.e.

$$2^0 + 2^1 + \ldots + 2^h$$

Usando a fórmula da p.g. finita, obtemos o resultado desejado. □

Teorema. *Em uma árvore binária quase completa, $n \geq 2^h$ e $n \leq 2^{h+1} - 1$*

Demonstração. Uma árvore binária quase completa é uma árvore binária completa sem alguns dos nós do último nível (nível h). Assim, partindo de uma árvore binária completa, podemos retirar no máximo $2^h - 1$ nós sem alterar a altura da árvore, obtendo assim uma árvore binária quase completa.

Desta forma, o número de nós da árvore binária quase completa é pelo menos

$$2^{h+1} - 1 - (2^h - 1) = 2^{h+1} - 2^h = 2^h.$$

□

Teorema. *Em uma árvore binária (quase) completa, $h = \lfloor \log_2 n \rfloor$.*

Demonstração. Se a árvore é completa, então $n = 2^{h+1} - 1$. Isolando h, temos

$$h = \log_2(n + 1) - 1$$

Note que $\log_2(n + 1)$ é inteiro (pois, pelo Teorema anterior, $n = 2^{h+1} - 1$), e então podemos escrever $\log_2(n + 1) = \lfloor \log_2 n \rfloor + 1$. Portanto,

$$h = (\lfloor \log_2 n \rfloor + 1) - 1 = \lfloor \log_2 n \rfloor.$$

Finalmente, a altura da árvore quase completa é igual a altura da árvore completa. □

Implementação de Árvores Binárias (Quase) Completas

A implementação deste caso particular de árvores usa vetor.

O primeiro elemento do vetor (índice 1) contém a raiz.

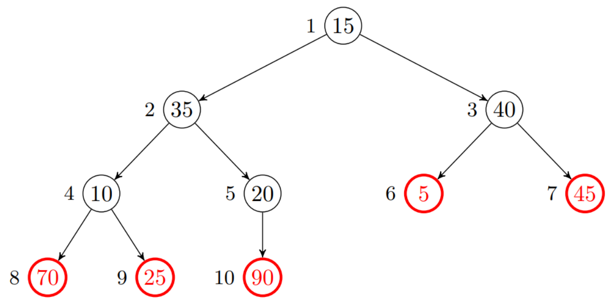
Todos os outros elementos têm a seguinte propriedade:

- O pai do nodo i está no índice $i/2$ (divisão inteira)
- O filho da esquerda do nodo i está no índice $2i$
- O filho da direita do nodo i está no índice $2i + 1$

Estas operações são extremamente rápidas nos computadores.

Exemplo:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
v	15	35	40	10	20	5	45	70	25	90



Um Resultado Para a Próxima Aula

Teorema.

$$\sum_{i=0}^{k} 2^i \cdot i = k2^{k+2} - (k+1)2^{k+1} + 2$$

Demonstração. Lembrando, a fórmula da soma de p.g. finita é

$$\sum_{i=0}^{k} c^i = \frac{c^{k+1} - 1}{c - 1}$$

Derivando os dois lados[1] e multiplicando por c (não vamos ver os detalhes),

$$\sum_{i=0}^{k} c^i i = \frac{kc^{k+2} - (k+1)c^{k+1} + c}{(c-1)^2}.$$

Fazendo $c = 2$, obtemos o resultado desejado. □

[1]Lembrete da regra da derivada (se quiser explicar mais): $\frac{d(u/v)}{dx} = \frac{v(\frac{du}{dx}) - u(\frac{dv}{dx})}{v^2}$