# Lista 2 - Algoritmos e Estrutura de Dados II

Profs. Marcos Castilho, André Vignatti e Daniel Oliveira

**Exercício 1.** Escreva um algoritmo recursivo para resolver o seguinte problema.

---

Média de Vetor

---

Instância: $(v, a, b)$, onde $v$ é um vetor indexado por $[a..b]$.
Resposta:

$$\frac{1}{b-a+1}\sum_{i=a}^{b} v[i].$$

---

**Exercício 2.** Dizemos que o vetor $v[a..b]$ é um *palíndromo* se a leitura de $v$ na ordem direta é igual à sua leitura na ordem reversa, isto é, se

$$(v[a], v[a+1], \ldots, v[b-1], v[b]) = (v[b], v[b-1], \ldots, v[a+1], v[a]).$$

Considere o seguinte problema computacional.

---

Palíndromo

---

Instância: $(v, a, b)$, onde $v$ é um vetor indexado por $[a..b]$.
Resposta: sim se $v[a..b]$ é um palíndromo ou não, caso contrário

---

1. Escreva um algoritmo *recursivo* para resolver este problema.
2. Seja $c(v, a, b)$ o número de comparações entre elementos de $v$ feitas na execução de seu algoritmo para a instância $(v, a, b)$ do problema, e sejam

$$\begin{aligned} c^+(n) &= \max\{c(v,a,b) \mid |(v,a,b)| = n\}, \\ c^-(n) &= \min\{c(v,a,b) \mid |(v,a,b)| = n\}, \end{aligned}$$

onde $|(v, a, b)| = b - a + 1$.

(a) Descreva as instâncias $(v, a, b)$ de tamanho $n$ para as quais $c(v, a, b) = c^+(n)$.

(b) Descreva as instâncias $(v, a, b)$ de tamanho $n$ para as quais $c(v, a, b) = c^-(n)$.

(c) Dê uma expressão para $c^-(n)$.

(d) Expresse $c^+(n)$ como uma recorrência.

(e) Resolva esta recorrência.

**Exercício 3.** Considere o problema de encontrar todos os fatores de um número natural.

| Fatores de um número |
|---|
| Instância: $a \in \mathbb{N}$. |
| Resposta: Todos os fatores de a. |

Por exemplo, se $a = 16$, então os fatores de $a$ são $1, 2, 4, 8, 16$.

1. Escreva um algoritmo *recursivo* para resolver o problema.

2. Escreva um algoritmo *iterativo* para resolver o problema.

**Exercício 4.** Seja $p$ um vetor de números racionais indexado por $[a..b]$. Dados $c \leq d \in [a..b]$, vamos denotar por $p_{c,d}$ o polinômio

$$p_{c,d}(x) = p[c]x^0 + p[c+1]x^1 + \ldots + p[d]x^{c-d}.$$

Por exemplo, se $p$ é o vetor dado por

| $i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $p[i]$ | 4 | 8 | 15 | 16 | 23 | 42 |

então,

$$p_{0,5}(x) = 4x^0 + 8x^1 + 15x^2 + 16x^3 + 23x^4 + 42x^5,$$

e

$$p_{2,4}(x) = 15x^0 + 16x^1 + 23x^2.$$

Considere o seguinte problema computacional.

| Avaliação de Polinômio |
|---|
| Instância: $(p, a, b, x)$, onde $p$ é um vetor de números racionais indexado por $[a..b]$ e $x$ é um número racional. |
| Resposta: $p_{a,b}(x)$. |

1. Escreva um algoritmo *recursivo* para resolver este problema (use o algoritmo da Exponenciação de exercícios anteriores).

2. Seja $s(n)$ e $m(n)$, respectivamente, o número de somas e multiplicações feitas pelo algoritmo. Para cada um desses dois recursos computacionais – $s(n)$ e $m(n)$ – seu algoritmo tem melhor e pior casos?

3. Expresse $s(n)$ e $m(n)$ como uma recorrência de **pior caso** (se houver), usando como tamanho de instância o valor de

$$|(p,a,b,x)| = b - a + 1 = n$$

4. Resolva as recorrências do item anterior.

**Exercício 5.** Trabalhando com matrizes:

1. Escreva uma função recursiva para decidir se uma matriz é simétrica.
2. Escreva uma função recursiva para transpor uma matriz quadrada.

**Exercício 6.** Dados $n, k \in \mathbb{N}$ o *coeficiente binomial* $\binom{n}{k}$ é o número de subconjuntos de $k$ elementos de um conjunto de $n$ elementos, e é dado por

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} 0, & \text{se } n < k, \\ \frac{n!}{k!(n-k)!}, & \text{se } 0 \leq k \leq n. \end{cases}$$

Considere o seguinte problema computacional:

| Coeficiente Binomial |
| --- |
| Instância: $(n,k)$, onde $n, k \in \mathbb{N}$.<br>Resposta: $\binom{n}{k}$ |

1. Quantas multiplicações faz o seguinte algoritmo para o problema de Coeficiente Binomial[1]?

| Binomial($n$,$k$) |
| --- |
| Se $n < k$<br>    Devolva 0<br>Devolva $\frac{\mathsf{Fatorial}(n)}{\mathsf{Fatorial}(k)\mathsf{Fatorial}(n-k)}$ |

2. Escreva um algoritmo *recursivo* o problema de Coeficiente Binomial baseado na seguinte recorrência[2].

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} 0, & \textbf{se } n < k, \\ 1, & \textbf{se } k = 0, \\ \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} & \textbf{se } 0 < k \leq n. \end{cases}$$

   (a) Seja $m(n,k)$ o número de multiplicações efetuadas pelo seu algoritmo para computar a instância $(n,k)$ do problema. Dê uma expressão para $m(n,k)$.

   (b) Seja $s(n,k)$ o número de somas efetuadas pelo seu algoritmo para computar a instância $(n,k)$ do problema. Expresse $s(n,k)$ através de uma recorrência.

[1] Fatorial refere-se ao algoritmo que calcula $n!$

[2] Esta recorrência é conhecida como *Triângulo de Pascal.*

**Exercício 7.** Considere o seguinte problema computacional.

| Uns na Representação Binária |
|---|
| Instância: $n \in \mathbb{N}$ em representação decimal. |
| Resposta: quantidade de 1's na representação binária de $n$ |

Por exemplo:

- 21 tem como resposta 3 (pois 10101 é 21 em binário).
- 16 tem como resposta 1 (pois 10000 é 16 em binário).

1. Escreva um algoritmo *recursivo* para resolver este problema.
2. A análise é **sempre** em função do tamanho da entrada. Para algoritmos numéricos, o tamanho da entrada é tipicamente a *quantidade de bits da entrada*. Seja $b$ a quantidade de bits da entrada.
   (a) Encontre uma fórmula para $b$ em função do número $n$ recebido como entrada.
   (b) Seja $s(b)$ o número de somas efetuadas pelo seu algoritmo para um entrada de $b$ bits. Expresse $s(b)$ como uma recorrência (ou duas, se houver melhor e pior caso)
   (c) Resolva a(s) recorrência(s) obtidas no item anterior.

**Exercício 8.** Considere o seguinte problema computacional.

| Diferença de Vetores | |
|---|---|
| Instância: | $(v, a, u, p, l)$, onde $v$ é um vetor indexado por $[a..a+l]$ e $u$ é um vetor indexado por $[p..p+l]$. |
| Resposta: | o menor $d \in [0..l]$ tal que $v[a+d] \neq u[p+d]$, ou $l+1$ se $v[a+d] = u[p+d]$ para todo $d \in [0..l]$. |

1. Escreva um algoritmo recursivo para resolver este problema.
2. Seja $c(n)$ o número de comparações de **pior caso** entre elementos de $v$ e $u$ na execução de seu algoritmo, onde o tamanho $n$ da instância é $|(v, a, u, p, l)| = l + 1 = n$. Expresse $c(n)$ como uma recorrência.
3. Resolva esta recorrência.

**Exercício 9.** Descreva o que os algoritmos abaixo fazem sem a ajuda do computador.

**(a)** Uma operação básica:

```
F(a, b)
----------------------
Se a < b
    Devolva 0
Devolva 1 + F(a − b, b)
```

**(b)** Não sei lidar com esse inteiro, tente você.

```
eu(n)
---
Se n = 0
    Devolva V
Devolva voce(n − 1)
```

```
voce(n)
---
Se n = 1
    Devolva V
Devolva eu(n − 1)
```

**(c)** Muitos bits para mim.

```
agregar(v, a, b)
---
Se a > b
    Devolva 0
Devolva 2 · agregar(v, a, b − 1) + v[b]
```

**(d)** Sou o primeiro.

```
pintar(matriz, i, j, n)
---
Se n ≤ 2
    matriz[i][j] ← 1
    matriz[i][j + 1] ← 0
    matriz[i + 1][j] ← 0
    matriz[i + 1][j + 1] ← 1
Senão
    m ← ⌊n/2⌋
    pintar(matriz, i, j, m)
    pintar(matriz, i, j + m, m)
    pintar(matriz, i + m, j, m)
    pintar(matriz, i + m, j + m, m)
```

**Exercício 10.** Considere o seguinte algoritmo para o problema de Mínimo de Vetor.

```
M(v, a, b)
---
Se a = b
    Devolva a
m ← ⌊(a+b)/2⌋
m1 ← M(v, a, m)
m2 ← M(v, m + 1, b)
Se v[m1] ≤ v[m2]
    Devolva m1
Devolva m2
```

1. Execute $\mathsf{M}(v, a, b)$ para as mesmas instâncias do problema de Mínimo de Vetor usadas como exemplo em aula.

2. Seja $c(n)$ o número de comparações entre elementos de $v$ feitas por $\mathsf{M}$ em instância de tamanho $n$. Expresse $c(n)$ como uma recorrência.

3. Resolva esta recorrência.

**Exercício 11.** Considere o seguinte algoritmo para o problema de Busca em Vetor.

---

$\mathsf{B}(x,v,a,b)$

---

Se $a > b$
    Devolva *não*
$m \leftarrow \lfloor \frac{a+b}{2} \rfloor$
Se $x = v[m]$
    Devolva $m$
$r \leftarrow \mathsf{B}(x, v, a, m-1)$
Se $r \neq$ *não*
    Devolva $r$
Devolva $B(x, v, m+1, b)$

---

1. Execute $\mathsf{B}(x, v, a, b)$ para as mesmas instâncias do problema de Busca em Vetor usadas como exemplo em aula.

2. Seja $c^+(n)$ o número de comparações de **pior caso** entre elementos de $v$ efetuadas na execução de $\mathsf{B}(x, v, a, b)$, onde $n = b - a + 1$.

   (a) Para que instâncias do problema temos o pior caso?

   (b) Expresse $c^+(n)$ como uma recorrência.

   (c) Resolva esta recorrência.