# MÍNIMO DE VETOR

Algoritmos e
Estrutura de Dados II

Prof. André Vignatti

# O PROBLEMA DO MÍNIMO DE VETOR

| Mínimo de Vetor |
| --- |
| **Instância:** $(v, a, b)$, onde $v$ é um vetor indexado por $[a..b]$, com $a \leq b$.<br>**Resposta:** $m \in [a..b]$ tal que $v[m] \leq v[i]$ para todo $i \in [a..b]$. |

```
Minimo(v, a, b)
---------------
m ← i ← a
Enquanto i < b
    i ← i + 1
    Se v[i] < v[m]
        m ← i
Devolva m
```

concluímos (aulas passadas):

$Minimo(v, a, b)$ efetua $b - a$ comparações entre elementos de $v$

# MÍNIMO DE VETOR: SOLUÇÃO RECURSIVA

Minimo'$(v, a, b)$

$m \leftarrow$ solução da instância $(v, a, b-1)$

Se $v[b] < v[m]$

  $m \leftarrow b$

Devolva $m$

# MÍNIMO DE VETOR: SOLUÇÃO RECURSIVA

Minimo'$(v, a, b)$

$m \leftarrow \text{Mínimo}'(v, a, b-1)$
Se $v[b] < v[m]$
    $m \leftarrow b$
Devolva $m$

**Exemplo.** *Executar* $Mínimo'(v, 1, 2)$ *para*

| $i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $v[i]$ | 16 | 23 | 4 | 42 | 15 | 8 | 4 |

Minimo'$(v, a, b)$

$m \leftarrow \text{Mínimo}'(v, a, b-1)$
Se $v[b] < v[m]$
  $m \leftarrow b$
Devolva $m$

# MÍNIMO DE VETOR: SOLUÇÃO RECURSIVA

Quando $a = b$, a tripla $(v, a, b-1)$ não é uma instância do problema de Mínimo de Vetor. Então,

| Minimo'$(v, a, b)$ |
|---|
| Se $a = b$ |
|     Devolva $a$ |
| $m \leftarrow \text{Minimo}'(v, a, b-1)$ |
| Se $v[b] < v[m]$ |
|     $m \leftarrow b$ |
| Devolva $m$ |

**Exemplo.** *Executar* $Minimo'(v,1,3)$ *e* $Minimo'(v,4,7)$

| $i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $v[i]$ | 16 | 23 | 4 | 42 | 15 | 8 | 4 |

Minimo'$(v, a, b)$

Se $a = b$
    Devolva $a$
$m \leftarrow \text{Minimo}'(v, a, b-1)$
Se $v[b] < v[m]$
    $m \leftarrow b$
Devolva $m$

# LEMBRANDO: ELEMENTOS DA RECURSÃO

Um *algoritmo recursivo* é um algoritmo que invoca a si próprio.
Num algoritmo recursivo existem **sempre** 3 elementos:

**Base:** Computação das instâncias que não são resolvidas de maneira recursiva;

**Recursão:** Invocação do algoritmo para outra instância do problema;

**Passo:** Transformação da resposta dessa outra instância em uma resposta da instância original.

# ELEMENTOS DA RECURSÃO

No caso do algoritmo $\text{Minimo}'$ temos que

**Base:** as instâncias $(v, a, b)$ onde $a = b$.

**Recursão:** a computação de $\text{Minimo}'(v, a, b - 1)$.

**Passo:** a transformação da resposta "parcial" de $\text{Minimo}'(v, a, b - 1)$ numa resposta "completa" de $\text{Minimo}'(v, a, b)$.

# ANÁLISE

quantas comparações entre elementos de $v$ são feitas na execução de $Minimo'(v, a, b)$?

$n$ : número de elementos no vetor

- para entrada $(v, a, b)$, $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a} + \mathbf{1}$

$C'(n)$: número de comparações na execução de $Minimo'(v, a, b)$ quando $b - a + 1 = n$

# ANÁLISE

$$C'(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 1, \\ 1 + \text{número de comparações na execução de Minimo}'(v, a, b-1), & \text{se } n > 1. \end{cases}$$

- na execução de $Minimo'(v, a, b-1)$ temos $(b-1) - a + 1 \ = \ n - 1$ elementos

# ANÁLISE

$$\boxed{C'(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 1, \\ 1 + \text{número de comparações na execução de Minimo}'(v, a, b-1), & \text{se } n > 1. \end{cases}}$$

- na execução de $Minimo'(v, a, b-1)$ temos $(b-1) - a + 1 \; = \; n - 1$ elementos

assim:

$$\boxed{\text{número de comparações na execução de Minimo}'(v, a, b-1) = C'(n-1)}$$

# ANÁLISE

$$\boxed{C'(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 1, \\ 1 + \text{número de comparações na execução de Minimo}'(v, a, b-1), & \text{se } n > 1. \end{cases}}$$

- na execução de $Minimo'(v, a, b-1)$ temos $(b-1) - a + 1 \; = \; n - 1$ elementos

assim:

$$\boxed{\text{número de comparações na execução de Minimo}'(v, a, b-1) = C'(n-1)}$$

e portanto:

$$\boxed{C'(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 1, \\ 1 + C'(n-1), & \text{se } n > 1. \end{cases}}$$

# RECORRÊNCIAS

$C'$ é uma função definida recursivamente, ou seja, uma *recorrência*

**Exemplo.** *Calcular* $C'(7)$

a **solução de uma recorrência** é a expressão não recursiva da recorrência

# RECORRÊNCIAS

solução de $C'(n)$:

# CHÃO E TETO

**Definição.** *Dado* $x \in \mathbb{R}$, *o* chão *de* $x$ *é o maior inteiro menor ou igual a* $x$, *ou seja,*

$$\lfloor x \rfloor = \max\{z \in \mathbb{Z} \mid z \leq x\},$$

*e o* teto *de* $x$ *é o menor inteiro maior ou igual a* $x$, *ou seja,*

$$\lceil x \rceil = \min\{z \in \mathbb{Z} \mid z \geq x\},$$

# CHÃO E TETO: EXEMPLOS

$$
\begin{aligned}
\lfloor 2 \rfloor &= 2; \\
\lceil 2 \rceil &= 2; \\
\lfloor z \rfloor &= z, \ \textit{para todo } z \in \mathbb{Z}; \\
\lceil z \rceil &= z, \ \textit{para todo } z \in \mathbb{Z}; \\
\left\lfloor \frac{35}{23} \right\rfloor &= 1; \\
\left\lceil \frac{35}{23} \right\rceil &= 2; \\
\left\lfloor \frac{-35}{23} \right\rfloor &= -2 \\
\left\lceil \frac{-35}{23} \right\rceil &= -1.
\end{aligned}
$$