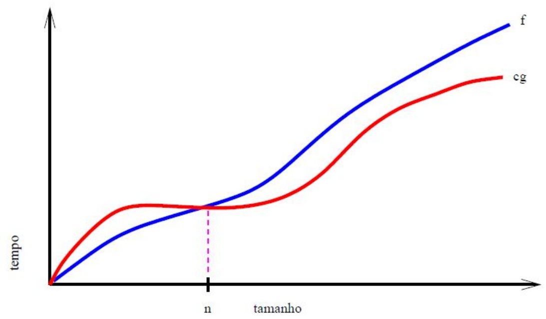
Notação Assintótica (Parte 2)

Prof. André Vignatti

Definição. $\Omega(g(n)) = \left\{ f(n) : \exists c > 0 \ e \ n_0 > 0 \ tal \ que \ f(n) \geq cg(n), \ \forall n \geq n_0 \right\}$.



Dizemos que $g(n)$ é um *limitante inferior assintótico* para $f(n)$.

Exemplo. Seja $f(n) = 5$. É verdade que $f(n) = \Omega(1)$?

SIM. Tomando $c = 1, n_0 = 0$ então $5 \geq c$ para $n \geq n_0$.

Exemplo. Seja $f(n) = \sqrt{n}$. É verdade que $f(n) = \Omega(1)$?

SIM. Tomando $c = 1, n_0 = 1$ então $\sqrt{n} \geq c$ para $n \geq n_0$.

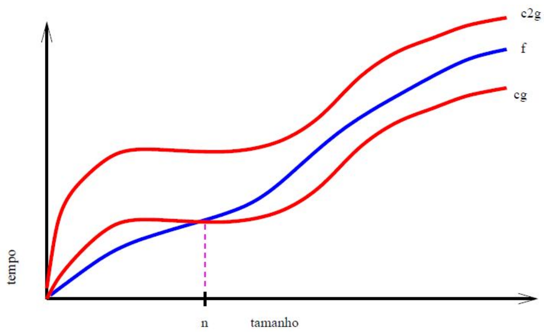
Exemplo. Seja $f(n) = 1/n$. É verdade que $f(n) = \Omega(1)$?

NÃO. Não existe c, n_0 pois $\frac{1}{n}$ sempre pode ser menor que uma constante fixa c.

Exemplo. Funções em $\Omega(n^2)$:

- n^2
- $n^2 + n$
- $n^2 - n$
- $1000n^2 + 1000n$
- $1000n^2 - 1000n$
- n^3
- $n^{2.0000001}$
- $n^2 \log_2 \log_2 \log_2 n$
- 2^{2^n}

Definição. *$f(n) \in \Theta(g(n))$ se $f(n) \in O(g(n))$ e $f(n) \in \Omega(g(n))$.*



Dizemos que $g(n)$ é um *limitante assintótico justo* (apertado) para $f(n)$.

Definição equivalente:

$f(n) \in \Theta(g(n))$ se existem constantes $c_1, c_2 > 0$ e n_0 tal que $c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n)$, para todo $n \geq n_0$.

Exemplo. Mostre que a soma dos n primeiros inteiros é $\Theta(n^2)$.

- **Limitante Superior**: $1 + 2 + \ldots + n \leq n + n + \ldots + n = n^2$. Então, tomando $c = 1, n_0 = 1$, a soma é $O(n^2)$.
- **Limitante Inferior**:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \ldots + n &\geq \lceil n/2 \rceil + (\lceil n/2 \rceil + 1) + \ldots + n \\ &\geq \lceil n/2 \rceil + \lceil n/2 \rceil + \ldots + \lceil n/2 \rceil \\ &= (n - \lceil n/2 \rceil + 1)\lceil n/2 \rceil \\ &\geq (n/2)(n/2) \\ &= n^2/4, \end{aligned}$$

assim, tomando $c = 1/4, n_0 = 1$ a soma é $\Theta(n^2)$.

Exemplo. Número Harmônico

O n-ésimo *número harmônico* é dado por

$$H(n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}.$$

Vamos provar que $H_n = \Theta(\log n)$.
Comece com as potências de 2, $n = 2^k$, e divida H_{2^k} em k grupos, cada um com

o dobro do tamanho do anterior:

$$
\begin{aligned}
H_{2^k} =& \sum_{j=1}^{2^k} \frac{1}{j} \\
=& 1+ \\
& \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \\
& \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} \\
& \dots \\
& \frac{1}{2^{k-1}} + \frac{1}{2^{k-1}+1} + \dots + \frac{1}{2^k - 1}
\end{aligned}
$$

Há também um termo extra, $\frac{1}{2^k}$.

Podemos limitar cada grupo acima e abaixo por uma constante limitando cada termo pela potência de 2 acima e abaixo dele.

$$
\begin{array}{lll}
\frac{1}{2} & \leq 1 & \leq 1 \\
\frac{1}{4} + \frac{1}{4} & \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{3} & \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\
\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} & \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} & \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \\
& \dots & \\
\frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k} + \dots + \frac{1}{2^k} & \leq \frac{1}{2^{k-1}} + \frac{1}{2^{k-1}+1} + \dots + \frac{1}{2^k-1} & \leq \frac{1}{2^{k-1}} + \frac{1}{2^{k-1}} + \dots + \frac{1}{2^{k-1}}
\end{array}
$$

Cada uma das somas à esquerda é $\frac{1}{2}$. Cada uma das somas da direita é 1. Juntos, temos $\frac{1}{2}k + \frac{1}{2^k} \leq H_{2^k} \leq k + \frac{1}{2^k}$. Escrito em termos de n,

$$\frac{1}{2}\log_2 n \leq H_n \leq \log_2 n + 1$$

Então quando $n = 2^k$, $H_n = \Theta(\log n)$. Para n que não são potências de 2, sendo n_- e n_+ as potências circundantes de 2 de n, observe que

$$n/2 < n_- < n < n_+ < 2n$$

temos, pela monotonicidade de H_n, que

$$\frac{1}{2}\log_2(n/2) < \frac{1}{2}\log_2 n_- < H_{n_-} < H_n < H_{n_+} < \log_2 n_+ + 1 < \log_2(2n) + 1$$

$$\frac{1}{2}\log_2 n - \frac{1}{2} < H_n < \log_2 n + 2$$

E portanto $H_n = \Theta(\log n)$.

Erros comuns:

Knuth observou: muito usam $\mathcal{O}$ como se fosse Θ!

- Lembre-se disso quando você ver a notação O sendo usada!

Outro **erro clássico**: $\mathcal{O}$ serve para pior caso, Ω para melhor caso.