Notação Assintótica (Parte 3)

Prof. André Vignatti

Definição. $o\left(g(n)\right) = \left\{f(n) : \forall c > 0\ \exists n_0 > 0\ \textit{tal que}\ 0 \leq f(n) < cg(n),\ \forall n \geq n_0\right\}$

Dizemos que $f(n)$ cresce mais lentamente que $g(n)$.
Outro jeito (provavelmente mais fácil) de usar: $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$.

Exemplo. $1000n^2 \in o(n^3)$

Para todo valor de c, um n_0 que satisfaz a definição é

$$n_0 = \left\lceil \frac{1000}{c} \right\rceil + 1.$$

Outros exemplos:

- $n^{1.99999} = o(n^2)$
- $n^2/\log n = o(n^2)$
- $n^2 \neq o(n^2)$
- $n^2/1000 \neq o(n^2)$

Definição. $\omega\left(g(n)\right) = \left\{f(n) : \forall c > 0\ \exists n_0 > 0\ \textit{tal que}\ 0 \leq cg(n) < f(n),\ \forall n \geq n_0\right\}$

Dizemos que, $f(n)$ cresce mais rapidamente que $g(n)$.
Outro jeito (provavelmente mais fácil) de usar: $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$.

Exemplo. $\frac{1}{1000}n^2 \in \omega(n)$

Para todo valor de c, um n_0 que satisfaz a definição é

$$n_0 = \lceil 1000c \rceil + 1.$$

Outros exemplos:

- $n^{2.000001} = \omega(n^2)$
- $n^2 \log n = \omega(n^2)$
- $n^2 \neq \omega(n^2)$

Definições equivalentes:

$$f(n) \in o(g(n)) \quad \text{se} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0.$$
$$f(n) \in O(g(n)) \quad \text{se} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty.$$
$$f(n) \in \Theta(g(n)) \quad \text{se} \quad 0 < \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty.$$
$$f(n) \in \Omega(g(n)) \quad \text{se} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} > 0.$$
$$f(n) \in \omega(g(n)) \quad \text{se} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty.$$

Falar de funções incomparáveis?

Teorema (Regra de l'Hôpital)**.** *Sejam f e g funções diferenciáveis tal que* $\lim_{n\to\infty} f(n) = \lim_{n\to\infty} g(n) = \infty$. *Se o limite de $f(n)/g(n)$ existir então,*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{f'(n)}{g'(n)}\,.$$

Exemplo. Seja $f(n) = \ln n$ e $g(n) = \sqrt{n}$. Como $f'(n) = \frac{1}{n}$ e $g'(n) = \frac{1}{2\sqrt{n}}$, temos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{f'(n)}{g'(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\sqrt{n}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{n}} = 0\,.$$

Portanto, $f(n) = o(g(n))$.