

Resolvendo Recorrências: Método da Iteração

Prof. André Vignatti

Método da iteração:

- Serve para **adivinhar** a resposta!
- Precisa fazer muitas contas!
- Precisa conhecer limitantes para várias somatórias.

Ideia: “abrir” (iterar) a recorrência e escrevê-la como uma somatória de termos que dependem apenas de n e das condições iniciais.

Diferença de CI237: agora, em CI165, as recorrências tem soluções **assintóticas**.

- Ou seja, não precisamos da solução **exata** (Eeeeebbaaa!!)

Considere a recorrência

$$\begin{aligned} T(n) &= b && \text{para } n \leq 3, \\ T(n) &= 3T(\lfloor n/4 \rfloor) + n && \text{para } n \geq 4. \end{aligned}$$

Iterando a recorrência obtemos

$$\begin{aligned} T(n) &= n + 3T(\lfloor n/4 \rfloor) \\ &= n + 3(\lfloor n/4 \rfloor + 3T(\lfloor n/16 \rfloor)) \\ &= n + 3(\lfloor n/4 \rfloor + 3(\lfloor n/16 \rfloor + 3T(\lfloor n/64 \rfloor))) \\ &= n + 3\lfloor n/4 \rfloor + 9\lfloor n/16 \rfloor + 27T(\lfloor n/64 \rfloor). \\ &\vdots \\ &= 3^0\lfloor n/4^0 \rfloor + 3^1\lfloor n/4^1 \rfloor + \dots + 3^{i-1}\lfloor n/4^{i-1} \rfloor + 3^iT(\lfloor n/4^i \rfloor). \\ &= \sum_{j=0}^{i-1} 3^j\lfloor n/4^j \rfloor + 3^iT(\lfloor n/4^i \rfloor) \\ &\leq \sum_{j=0}^{i-1} 3^jn/4^j + 3^iT(n/4^i) \end{aligned}$$

Quando parar?

Quando $n/4^i \leq 3$

Ou seja, quando $i = \log_4 n$ (a rigor não está certo, mas só queremos um “chute”)

Assim

$$\begin{aligned} T(n) &\leq \sum_{j=0}^{\log_4 n - 1} 3^j n/4^j + 3^{\log_4 n} T(n/4^{\log_4 n}) \\ &= \sum_{j=0}^{\log_4 n - 1} (3/4)^j n + 3^{\log_4 n} T(1) \\ &= n \sum_{j=0}^{\log_4 n - 1} (3/4)^j + n^{\log_4 3} b \\ &\leq n \sum_{j=0}^{\infty} (3/4)^j + bn \\ &= 4n + bn \\ &= O(n). \end{aligned}$$

Removendo Pisos e Tetos

- Lidar com pisos e tetos é chato!
- Pode-se remover pisos e tetos se supor que a recorrência é definida apenas para potências de um número, por exemplo, $n = 4^i$.
 - Mas a recorrência deve ser provada para todo \mathbb{N} .
- Então,
 - (1) **adivinha** um chute usando potências,
 - (2) mas **prova-se** o chute para todo \mathbb{N} usando indução.

Vamos provar usando o método da substituição (indução)

$$\begin{aligned} T(n) &= b && \text{para } n \leq 3, \\ T(n) &= 3T(\lfloor n/4 \rfloor) + n && \text{para } n \geq 4. \end{aligned}$$

Chuto que $T(n) \leq cn$.

$$\begin{aligned}T(n) &= 3T(\lfloor n/4 \rfloor) + n \\ &\leq 3c\lfloor n/4 \rfloor + n \\ &\leq 3c(n/4) + n \\ &\leq cn\end{aligned}$$

onde a última desigualdade vale se $c \geq 4$.