Resolvendo Recorrências: Método da Árvore de Recorrência

Prof. André Vignatti

Método da Árvore de Recorrência:

- Permite visualizar melhor o que acontece quando a recorrência é iterada.
- É mais fácil organizar as contas.
- Útil para recorrências de algoritmos de divisão-e-conquista.

Considere a recorrência

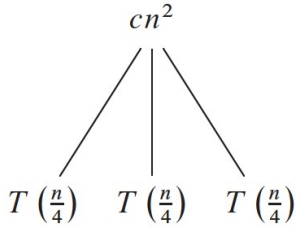
$$\begin{array}{rcll} T(n) & = & \Theta(1) & \text{para } n = 1, 2, 3, \\ T(n) & = & 3T(\lfloor n/4 \rfloor) + cn^2 & \text{para } n \geq 4, \end{array}$$

onde $c > 0$ é uma constante.

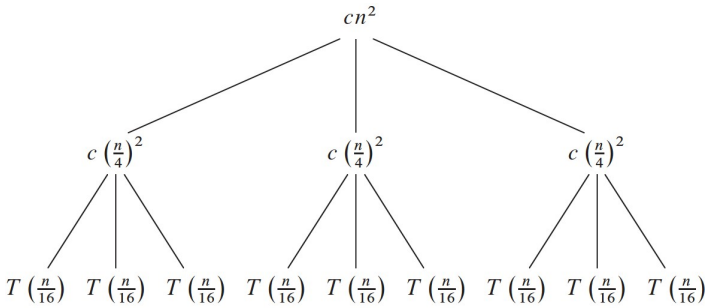
Simplificação: supor recorrência definida apenas para potências de 4

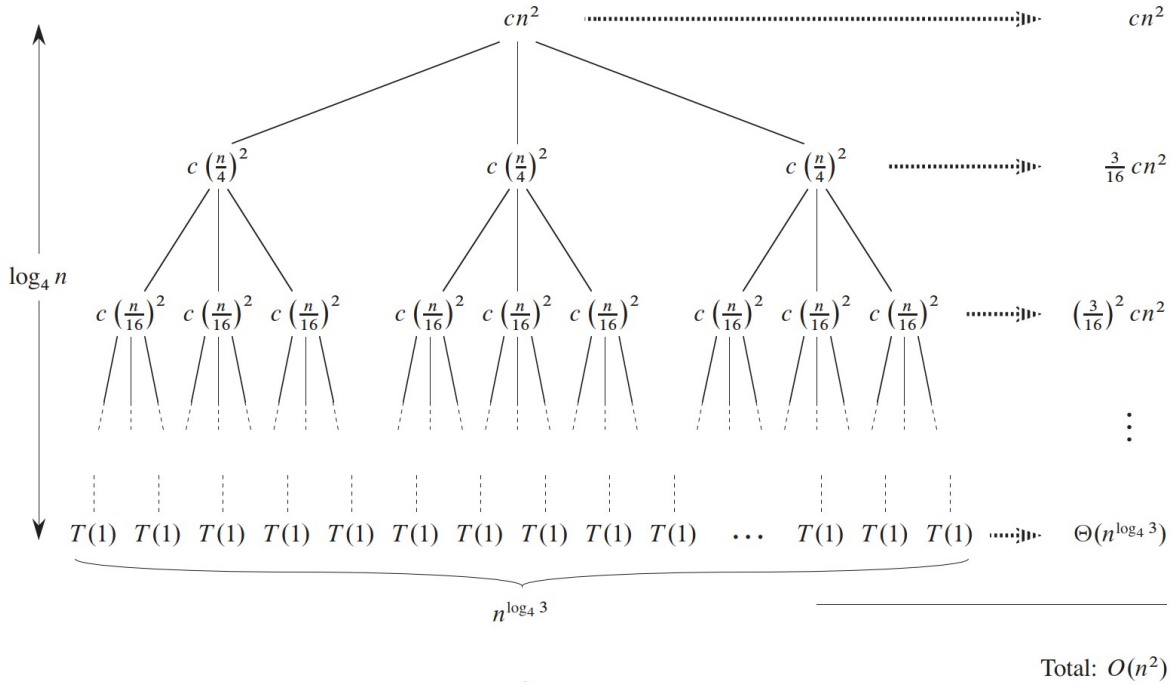
$$\begin{array}{rcll} T(n) & = & \Theta(1) & \text{para } n = 1, \\ T(n) & = & 3T(n/4) + cn^2 & \text{para } n = 4, 16, \ldots, 4^i, \ldots. \end{array}$$

A simplificação facilita a solução. Depois usamos o método da substituição (prova por indução) para formalizar.



- O número de níveis é $\log_4 n + 1$.
- No nível i o tempo gasto (sem contar as chamadas recursivas) é $(3/16)^i cn^2$.


cn^2
$c\left(\frac{n}{4}\right)^2$
$c\left(\frac{n}{4}\right)^2$
$c\left(\frac{n}{4}\right)^2$
$T\left(\frac{n}{16}\right)$ $T\left(\frac{n}{16}\right)$ $T\left(\frac{n}{16}\right)$ $T\left(\frac{n}{16}\right)$ $T\left(\frac{n}{16}\right)$ $T\left(\frac{n}{16}\right)$ $T\left(\frac{n}{16}\right)$ $T\left(\frac{n}{16}\right)$ $T\left(\frac{n}{16}\right)$


cn^2
cn^2
$c\left(\frac{n}{4}\right)^2$
$c\left(\frac{n}{4}\right)^2$
$c\left(\frac{n}{4}\right)^2$
$\frac{3}{16}cn^2$
$\log_4 n$
$c\left(\frac{n}{16}\right)^2$ $c\left(\frac{n}{16}\right)^2$ $c\left(\frac{n}{16}\right)^2$ $c\left(\frac{n}{16}\right)^2$ $c\left(\frac{n}{16}\right)^2$ $c\left(\frac{n}{16}\right)^2$ $c\left(\frac{n}{16}\right)^2$ $c\left(\frac{n}{16}\right)^2$ $c\left(\frac{n}{16}\right)^2$
$\left(\frac{3}{16}\right)^2 cn^2$
$T(1)$ $T(1)$ $T(1)$ $T(1)$ $T(1)$ $T(1)$ $T(1)$ $T(1)$ $T(1)$ $T(1)$ $\cdots$ $T(1)$ $T(1)$ $T(1)$
$\Theta(n^{\log_4 3})$
$n^{\log_4 3}$
Total: $O(n^2)$

- No último nível há $3^{\log_4 n} = n^{\log_4 3}$ folhas. Como $T(1) = \Theta(1)$ o tempo gasto é $\Theta(n^{\log_4 3})$.

Logo,

$$\begin{aligned} T(n) &= cn^2 + \frac{3}{16}cn^2 + \left(\frac{3}{16}\right)^2 cn^2 + \cdots + \left(\frac{3}{16}\right)^{\log_4 n - 1} cn^2 + \Theta(n^{\log_4 3}) \\ &= cn^2 \sum_{i=0}^{\log_4 n - 1} \left(\frac{3}{16}\right)^i + \Theta(n^{\log_4 3}) \\ &\leq cn^2 \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{3}{16}\right)^i + \Theta(n^{\log_4 3}) \\ &= \frac{16}{13}cn^2 + \Theta(n^{\log_4 3}), \end{aligned}$$

e $T(n) \in O(n^2)$.

Mas $T(n) \in O(n^2)$ é realmente a solução da recorrência original (sem simplificação)? Pela árvore de recorrência, chutamos que $T(n) \leq dn^2$ para alguma constante $d > 0$.

$$\begin{aligned} T(n) &= 3T(\lfloor n/4 \rfloor) + cn^2 \\ &\leq 3d\lfloor n/4 \rfloor^2 + cn^2 \\ &\leq 3d(n/4)^2 + cn^2 \\ &= \frac{3}{16}dn^2 + cn^2 \\ &\leq dn^2 \end{aligned}$$

onde a última desigualdade vale se $d \geq (16/13)c$ (**Yeeesss!!**).

Resumo:

- O número de nós em cada nível da árvore é o número de chamadas recursivas.
- Em cada nó indicamos o "tempo" ou "trabalho" gasto naquele nó que **não** corresponde a chamadas recursivas.
- Na coluna mais à direita indicamos o **tempo total** naquele nível que **não** corresponde a chamadas recursivas.
- Somando ao longo da coluna determina-se a solução da recorrência.

Eis um exemplo. Vamos resolver a recorrência

$$\begin{array}{lcll} T(n) & = & 1 & \text{para } n = 1, 2, \\ T(n) & = & T(n/3) + T(2n/3) + n & \text{para } n \geq 3. \end{array}$$

Usando a árvore de recorrência, a solução é $T(n) \in O(n \lg n)$. (Resolvido em aula)

Recorrências com Notação Assintótica

Uma "recorrência"

$$\begin{aligned} T(n) &= \Theta(1) && \text{para } n = 1, 2, \\ T(n) &= 3T(\lfloor n/4 \rfloor) + \Theta(n^2) && \text{para } n \geq 3 \end{aligned}$$

representa todas as recorrências da forma

$$\begin{aligned} T(n) &= a && \text{para } n = 1, 2, \\ T(n) &= 3T(\lfloor n/4 \rfloor) + bn^2 && \text{para } n \geq 3 \end{aligned}$$

onde a e $b > 0$ são constantes.

Soluções exatas dependem dos valores de a e b, mas estão todas na mesma classe Θ.

A "solução" é $T(n) = \Theta(n^2)$, ou seja, $T(n) \in \Theta(n^2)$.

As mesmas observações valem para as classes O, Ω, o, ω.

Recorrência do Mergesort

Podemos escrever a recorrência de tempo do Mergesort como

$$\begin{aligned} T(1) &= \Theta(1) \\ T(n) &= T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(n) \qquad \text{para } n \geq 2. \end{aligned}$$

A solução da recorrência é $T(n) = \Theta(n \lg n)$.

A prova é essencialmente a mesma do primeiro exemplo. (Exercício!)