# Complexidade de Tempo de Algoritmos Aleatorizados

Prof. André Vignatti

**Definição.** *Uma **variável aleatória** (v.a.) $X$ sobre espaço $\Omega$ é uma função $X : \Omega \to \mathbb{R}$.*

**Exemplo.** Considere o lançamento de dois dados e uma v.a. $X$ que representa a soma dos valores dos dois dados.

- $X$ pode assumir 11 valores possíveis: $X \in \{2, 3, \ldots, 12\}$
- Há 36 possibilidades p/ dados: {(⚀,⚀) , (⚀,⚁) , ... , (⚅,⚅)}

Dado v.a. $X$ e $a \in \mathbb{R}$, o evento "$X = a$" representa o conjunto $\{e \in \Omega : X(e) = a\}$. Assim,

$$\Pr(X = a) = \sum_{e \in \Omega : X(e) = a} \Pr(e).$$

**Exemplo.** Evento $X = 4$ tem 3 eventos básicos: {(⚀,⚂), (⚁,⚁), (⚂,⚀)}

Portanto

$$\Pr(X = 4) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

**Definição.** *Duas v.a. $X$ e $Y$ são **independentes** se e somente se*

$$\Pr(\ (X = x) \cap (Y = y)\ ) \quad = \quad \Pr(X = x) \cdot \Pr(Y = y) \quad \forall x, y$$

**Definição (Esperança).** *A **esperança** de uma v.a. $X$ é dada por*

$$\mathrm{E}[X] = \sum_i i \cdot \Pr(X = i),$$

*onde a soma é sobre todos valores assumidos por $X$.*

**Exemplo.** Considere o exemplo do lance de dois dados e a v.a. $X$ igual a soma dos valores obtidos.

$$\mathrm{E}[X] = 2\frac{1}{36} + 3 \cdot \frac{2}{36} + \cdots + 12 \cdot \frac{1}{36} = 7$$

Note que na soma do exemplo acima, devemos saber o número de eventos para cada valor de $X$.

Se $X$ é uma v.a. que só assume valores 0 e 1, então $\mathrm{E}[X] = Pr[X = 1]$. (Exercício)

# Linearidade da Esperança

**Teorema** (**Linearidade da Esperança**). *Para qualquer coleção finita de v.a. $X_1, \ldots, X_n$ com esperanças finitas*

$$\mathrm{E}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1} \mathrm{E}[X_i]$$

**Observação.** Não há restrições sobre a independência das v.a. $X_1, \ldots, X_n$.

**Lema.** *Dados v.a. $X$ e constante $c$, temos $\mathrm{E}[c \cdot X] = c \cdot \mathrm{E}[X]$.*

**Exemplo.** Considere o exemplo do lance de dois dados.

- $X_1$: v.a. do valor do primeiro dado.
- $X_2$: v.a. do valor do segundo dado.
- $X$: v.a. da soma dos valores dos dois dados.

Note que $X = X_1 + X_2$. Assim,

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[X] &= \mathrm{E}[X_1 + X_2] \\
&= \mathrm{E}[X_1] + \mathrm{E}[X_2] \\
&= 2 \cdot \sum_{i=1}^{6} i \cdot \frac{1}{6} \\
&= 7
\end{aligned}$$

**Conclusão**: Ficou mais fácil calcular $\mathrm{E}[X]$ com linearidade da esperança.

# Esperando o Primeiro Sucesso

Temos uma moeda viciada: CARA com prob. $p$, COROA com prob. $1 - p$.

- Quantas jogadas são **esperadas** até tirar a primeira CARA?

Seja $X$ a v.a. do número de jogadas até a primeira CARA.

$$\begin{aligned}
\Pr(X = 1) &= p \\
\Pr(X = 2) &= (1-p)p \\
\Pr(X = 3) &= (1-p)(1-p)p \\
&\vdots \\
\Pr(X = j) &= (1-p)^{j-1}p
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[X] &= \sum_{j=0}^{\infty} j \cdot \Pr[X=j] \;=\; \sum_{j=0}^{\infty} j(1-p)^{j-1}p \;=\; \frac{p}{1-p}\sum_{j=0}^{\infty} j(1-p)^{j} \\
&= \text{(ver eq. A.8 do CLRS)}\ \frac{p}{1-p}\frac{(1-p)}{p^2} \;=\; \frac{1}{p}.
\end{aligned}$$

Podemos resumir tudo no seguinte resultado:

**Teorema.** *Num experimento com jogadas independentes, cada jogada com prob. $p$ de sucesso, o número* ***esperado*** *de jogadas até o primeiro sucesso é $1/p$.*

# Adivinhando Cartas

**JOGO**: embaralhar $n$ cartas; virar elas **uma a uma**; tentar **adivinhar** cada carta.

**adivinhar sem memória:** não lembramos das cartas já viradas.

Nossa solução: chutamos **aleatoriamente** uma carta, com prob. $1/n$.

- Seja v.a. $X_i = 1$ se a $i$-ésima predição está correta, $X_i = 0$ caso contrário.
- Seja v.a. $X$ = número de predições corretas = $X_1 + \ldots + X_n$.

**Teorema.** *O número esperado de vezes que adivinhamos corretamente é* 1.

*Demonstração.*

- $\mathrm{E}[X_i] = \Pr[X_i = 1] = 1/n$.
- (lin. da esperança) $\mathrm{E}[X] = \mathrm{E}[X_1] + \ldots + \mathrm{E}[X_n] = 1/n + \ldots + 1/n = 1$.

$\square$

**adivinhar memorizando:** conseguimos lembrar das cartas já viradas.

Nossa solução: na $i$-ésima predição, chutamos uma das $n - i + 1$ cartas restantes.

**Teorema.** *O número esperado de vezes que adivinhamos corretamente é* $\Theta(\log n)$.

*Demonstração.*

- $\mathrm{E}[X_i] = \Pr[X_i = 1] = 1/(n - i + 1)$.
- (lin. da esperança) $\mathrm{E}[X] = \mathrm{E}[X_1] + \ldots + \mathrm{E}[X_n] = 1/n + \ldots + 1/2 + 1/1 = H(n) = \Theta(\log n)$.

A última igualdade segue da desigualdade A.14 e exercício A.2-3 de CLRS. □

# Colecionador de Cupons

**Colecionando Cupons**: Cada caixa de cereal vem um **cupom**. No total, há $n$ cupons diferentes. **Quantas** caixas deve-se comprar para ter todos os cupons?

- Ideia: **Progredimos** quando conseguimos um cupom novo.
- Objetivo: progredir $n$ vezes.

Qual a probabilidade de progredir?

- Se já tem $j$ cupons, obtém-se um novo com probabilidade $(n - j)/n$.

Quantas caixas para **progredir**?

- Fase $j$ = num. de caixas entre ter $j$ e $j + 1$ cupons diferentes.
- Seja $X_j$ = número de caixas compradas na fase $j$.
- Na fase $j$, **esperamos o primeiro sucesso** de um evento com probabilidade $(n - j)/n$.
- Então, $\mathrm{E}[X_j] = n/(n - j)$.

**Teorema.** *O número esperado de caixas necessárias é* $\Theta(n \log n)$.

*Demonstração.* Seja $X = X_0 + \ldots + X_{n-1}$ o número total de caixas compradas. Então,

$$\mathrm{E}[X] = \sum_{j=0}^{n-1} \mathrm{E}[X_j] = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{n}{n-j} = n \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = nH(n).$$

□