

# Revisão: Somatórios e Logaritmos

Prof. André Vignatti

$f: A \rightarrow \mathbb{R}$

$X$ : subconjunto de  $A$ .

$a, b$ : inteiros.

**Notação.**

$$\sum_{x \in X} f(x)$$

denota a soma dos valores de  $f(x)$  para cada  $x \in X$ .

Se  $X = \emptyset$ , então

$$\sum_{x \in X} f(x) = 0.$$

$$\sum_{i=a}^b f(i) := \sum_{x \in \{a, a+1, \dots, b\}} f(x).$$

**Teorema.** Dados um conjunto  $X$  e  $c \in \mathbb{R}$ ,

$$\sum_{x \in X} c = c|X|.$$

**Teorema.** Dados  $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$  e  $X \subseteq A$ ,

$$\sum_{x \in X} (f(x) + g(x)) = \sum_{x \in X} f(x) + \sum_{x \in X} g(x).$$

**Teorema.** Dada  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $X \subseteq A$  e  $c \in \mathbb{R}$ ,

$$\sum_{x \in X} cf(x) = c \sum_{x \in X} f(x).$$

**Exemplo.** Qual o valor do somatório  $\sum_{j=1}^5 j^2$ ?

Temos que  $\sum_{j=1}^5 j^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55$ .

**Exemplo.** Qual o valor do somatório  $\sum_{k=4}^8 (-1)^k$ ?

(Resolver em sala)

Às vezes é útil deslocar o índice do somatório. Isso é geralmente feito para juntar dois somatórios cujos os índices não batem.

**Exemplo.** Suponha o somatório  $\sum_{j=1}^5 j^2$ . Queremos deslocar o índice, começando de 0 até 4. Para isso, fazemos  $k = j - 1$ . Então o termo  $j^2$  vira  $(k + 1)^2$ . Assim,

$$\sum_{j=1}^5 j^2 = \sum_{k=0}^4 (k + 1)^2$$

É fácil verificar que ambos são iguais a 55.

**Exemplo.** Somatórios duplos aparecem em diversos contextos, por exemplo, em análise de algoritmos com laços aninhados. Um exemplo é:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^3 ij &= \sum_{i=1}^4 (i + 2i + 3i) \\ &= \sum_{i=1}^4 6i \\ &= 6 \sum_{i=1}^4 i \\ &= 6(1 + 2 + 3 + 4) = 60. \end{aligned}$$

**Teorema.**  $\sum_{i=1}^n i = n(n + 1)/2$ .

*Demonstração.* Seja

$$S = 1 + 2 + \dots + n$$

$$S = n + (n - 1) + \dots + 1$$

Somando termo a termo,

$$2S = (n + 1) + (n + 1) + \dots + (n + 1) = n(n + 1)$$

Isolando  $S$ , o resultado segue. □

**Exemplo.** Qual o valor de  $\sum_{i=1}^{100} 7i$ ?

$$\sum_{i=1}^{100} 7i = 7 \sum_{i=1}^{100} i = 7 \frac{(100)(101)}{2} = 35350.$$

**Exemplo.** Qual o valor de  $\sum_{i=50}^{100} 11i$ ?

Note que  $\sum_{i=1}^{100} 11i = \sum_{i=1}^{49} 11i + \sum_{i=50}^{100} 11i$ . Assim,

$$\begin{aligned}\sum_{i=50}^{100} 11i &= \sum_{i=1}^{100} 11i - \sum_{i=1}^{49} 11i \\ &= 11 \sum_{i=1}^{100} i - 11 \sum_{i=1}^{49} i \\ &= 11 \left( \sum_{i=1}^{100} i - \sum_{i=1}^{49} i \right) \\ &= 11 \left( \frac{100 \cdot 101}{2} - \frac{49 \cdot 50}{2} \right) \\ &= 11(5050 - 1225) = 42075.\end{aligned}$$

**Definição.**  $\log_b x$  é o número  $y$  tal que  $b^y = x$ .

**Exemplo.**  $\log_3 81 = 4$  pois  $3^4 = 81$

Propriedades (independem do valor da base):

- $b^{\log_b a} = a$
- $\log ab = \log a + \log b$
- $\log a/b = \log a - \log b$
- $\log a^b = b \log a$
- $\log \sqrt[b]{a} = (1/b) \log a$

(Mudança de base)  $\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$ .

Em computação, quando o logaritmo é escrito sem base, por convenção, significa que é base 2.