Revisão: Indução

Prof. André Vignatti

Demonstrações (Provas)

Como ter certeza que uma afirmação é verdadeira?

- deve-se provar (ou demonstrar) a afirmação

O que é uma prova?
Historicamente, há duas noções distintas de prova:

1. algo que induz no público uma sensação intuitiva de certeza de que o resultado está correto
   - "é uma experiência transformadora interna - uma maneira de sua alma fazer contato com as verdades eternas do céu platônico".
2. uma sequência de símbolos obedecendo a certas regras - uma prova é uma computação.
   - Se a prova é puramente mecânica, então, em princípio, você pode descobrir novas verdades matemáticas apenas girando uma manivela.

Como provar teoremas:

- não há receita de bolo
- mas há técnicas que podem servir:
  - demonstração direta
  - demonstração por contrapositiva
  - demonstração por contradição
  - demonstração por casos
  - demonstração por indução

Indução

Ideia ingênua: testar vários exemplos, e dizer que isso "prova" a afirmação.

Elaborando mais essa ideia, chega-se no conceito de prova por indução.

Teorema. $P(n) : \sum_{i=1}^{n} = n(n+1)/2$.

- Para $n = 1$,
  - [**lado esquerdo**] 1.
  - [**lado direito**] $\frac{1(2)}{2} = 1$.
- Para $n = 2$,
  - [**lado esquerdo**] usando $P(1) : \sum_{i=1}^{1} = \frac{1(2)}{2}$ (já provado),

$$\sum_{i=1}^{2} i = \sum_{i=1}^{1} i + 2 = \frac{1(2)}{2} + 2 = 3$$

  - [**lado direito**] $\frac{2(3)}{2} = 3$
- Para $n = 3$,
  - [**lado esquerdo**] usando $P(2) : \sum_{i=1}^{2} = \frac{2(3)}{2}$ (já provado),

$$\sum_{i=1}^{3} i = \sum_{i=1}^{2} i + 3 = \frac{2(3)}{2} + 3 = \frac{2(3) + 2(3)}{2} = 6$$

  - [**lado direito**] $\frac{3(4)}{2} = 6$
- Podemos usar a mesma ideia para $n = 4, 5, \ldots$

Com exceção de $P(1)$, o resto do raciocínio é repetitivo.

Podemos descrever isso com um algoritmo:

Algoritmo 1: Algoritmo para provar uma afirmação

faça um prova para $P(1)$
for $k \leftarrow 2$ **to** n **do**
  use as provas de $P(1), P(2) \ldots, P(k-1)$ como verdades
  com essa **hipótese**, prove $P(k)$
end

Para preencher esse algoritmo, precisamos:

- **Base**: fazer a prova para $P(1)$
- **Hipótese**: supor que $P(1), P(2) \ldots, P(k-1)$ já foram provados
- **Passo**: usando a hipótese, provar $P(k)$

Para o exemplo, falta formalizar a escrita da hipótese, e fazer o passo:

- hipótese: $P(k-1) : \sum_{i=1}^{k-1} = \frac{(k-1)(k)}{2}$ é verdade
- passo: vamos provar $P(k)$

$$\sum_{i=1}^{k} i = \sum_{i=1}^{k-1} i + k = \frac{(k-1)(k)}{2} + k = \frac{(k-1)(k) + 2(k)}{2} = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Análise do Algoritmo de Indução

Em análise de algoritmos, geralmente analisamos (1) tempo de execução e (2) corretude.

- Para o algoritmo de indução, só importa a corretude.
- Para provar a corretude de algoritmos, usa-se prova por indução.

Agora estamos com um problema estilo "ovo e galinha".

Solução: assumir que a corretude da indução é um **axioma**.

Exemplos

Teorema. *$n < 2^n, \forall n \in N$.*

Demonstração.

base da indução : Seja $k = 0$, então $0 < 1 = 2^0$. Logo $p(0)$ é verdadeiro.

hipótese da indução : Assumir que $p(k) : k < 2^k$ é verdadeiro.

passo da indução : Mostrar que $p(k) \Rightarrow p(k+1)$.

$$k + 1 < (hip.) 2^k + 1 \leq 2^k + 2^k = 2 * 2^k = 2^{k+1}.$$

$\square$

Teorema. $2^n < n!, \forall n \in N, n > 3.$

Demonstração.

base da indução : Seja $k = 4$. Então $2^4 = 16 < 24 = 4!$.

hipótese da indução : Assumir que $p(k) : 2^k < k!, k > 3$ é verdadeiro.

passo da indução :

$$2^{k+1} = 2 \cdot 2^k < (hip) 2 \cdot k! < (k+1)k! < (k+1)!.$$

$\square$

Teorema. $n^2 \leq n!$, *para todo* $n \in \mathbb{N}, n \geq 4$

Demonstração.

base da indução : Para $n = 4$, temos $4^2 \leq 4!$, pois $16 \leq 24$.

hipótese da indução : $q^2 \leq q!$ é verdade, para todo $4 \leq q \leq k-1$.

passo da indução : Queremos provar que $k^2 \leq k!$.

Mas isso é mesma coisa que provar que $(k-1+1)^2 \leq k!$.

Mas isso é mesma coisa que provar que $(k-1)^2 + 2(k-1) + 1 \leq k!$.

Assim:

$$\begin{array}{rcc}
(k-1)^2 + 2(k-1) + 1 & \overset{\text{(hipótese)}}{\leq} & (k-1)! + 2(k-1) + 1 \\
& \overset{(\text{pois } k \geq 4)}{\leq} & (k-1)! + 2(k-1) + (k-1) \\
& = & (k-1)! + 3(k-1) \\
& \leq & (k-1)! + 3(k-1)! \\
& = & 4(k-1)! \\
& \overset{(\text{pois } k \geq 4)}{\leq} & k(k-1)! \\
& = & k!
\end{array}$$

$\square$