Exercícios

Prof. André Vignatti

Exercício 1. **(a)** Considere a seguinte variação no problema de colecionar figurinhas. Cada caixa de Sucrilhos tem um **cupom de prêmio** de um total de $2n$ cupons. Os cupons são organizadas em n pares, tal que 1 e 2 são um par, 3 e 4 são outro par, e assim por diante. Quando você conseguir um cupom de cada par, você pode trocar por um prêmio. Qual é o número esperado de caixas que deve-se comprar até conseguirmos trocar pelo prêmio?

(b) Generalize o resultado do problema da parte (a) para o caso onde há kn cupons diferentes, organizados em n conjuntos disjuntos de k cupons, tal que é preciso ter um cupom de cada conjunto.

Exercício 2. Você vai entrevistar n pessoas para algumas vagas de emprego, mas está com preguiça. O seu método então é acessar o site `random.org` e obter um número fracionário p gerado aleatoriamente de maneira uniforme entre 0 e 1. Após isso, para cada candidato i, você obtem outro número fracionário $0 \leq q_i \leq 1$ gerado aleatoriamente de maneira uniforme. Se q_i for menor que p, então você contrata o candidato i, caso contrário você não contrata.

Pede-se:

(a) Em função de p, qual a probabilidade de um candidato ser contratado?

(b) Seja X_i uma v.a. tal que $X_i = 1$ se você contratar o candidato i, $X_i = 0$ caso contrário. Qual é o valor de $\mathrm{E}[X_i]$?

(c) Qual é o número esperado de candidatos contratados, em função de p?

Exercício 3. Considere uma função `random(a,b)` que retorna um inteiro aleatório r distribuído de maneira uniforme, tal que $a \leq r \leq b$. Considere o algoritmo a seguir:

Algoritmo 1: Contador Aleatorizado

Entrada: inteiro n
Saída: inteiro s
início
  $s \leftarrow 0$
  para $i \leftarrow 1$ **até** n **faça**
    $r \leftarrow$ `random(1,n)`
    se $r \leq i$ **então**
      $s \leftarrow s + 1$
  retorna s

Seja X_i uma variável aleatória tal que $X_i = 1$ se na i-ésima iteração $r \leq i$; $X_i = 0$ caso contrário. Seja $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$. Em todos os itens abaixo, **explique detalhadamente**, incluindo TODOS os passos das contas (se houver contas).

(a) Qual a probabilidade $\Pr[X_i = 1]$?

(b) Qual a esperança $\mathrm{E}[X_i]$?

(c) Qual a relação entre o valor final da variável s (valor de retorno) com a variável aleatória X?

(d) Qual a esperança $\mathrm{E}[X]$?

Exercício 4 (Valor Esperado Retornado). Considere um grafo conexo $G = (V, E)$ com custos nas arestas $c_e, \forall e \in E$. Uma **árvore geradora** de G é um subgrafo de G que é uma árvore e conecta todos os vértices de G. O algoritmo abaixo gera uma árvore geradora aleatória:

AG-RAND(grafo conexo $G = (V, E)$ com custos $c_e, \forall e \in E$)

$S \leftarrow E$
$T \leftarrow (V, \emptyset)$
enquanto *T não é árvore geradora* **faça**
    $e \leftarrow$ aresta escolhida aleatoriamente de maneira uniforme em S
    se *$T \cup \{e\}$ não forma ciclo* **então**
        $S \leftarrow S - \{e\}$
        $T \leftarrow T \cup \{e\}$
retorna T

Seja $n = |V|$. Suponha que os valores de c_e estão **distribuídos aleatoriamente de maneira uniforme entre** 1 **e** n.

(a) Seja k um inteiro entre 1 e n. Qual é a probabilidade $\Pr[c_e = k]$?

(b) Qual é a esperança $\mathrm{E}[c_e]$?

(c) Seja $c(T) = \sum_{e \in T} c_e$ o custo da árvore T retornada. Qual é a esperança $\mathrm{E}[c(T)]$? (Explique todas as variáveis aleatórias definidas, mostre todas as contas e passos detalhadamente)

Exercício 5. Seja $\pi(n)$ a quantidade de números de primos menores ou igual a n. Se $n \to \infty$, um famoso teorema diz que $\pi(n) = n/\ln n$. Considere o seguinte algoritmo:

DevolvePrimo(inteiro n)

---

while *TRUE* **do**
    $r \leftarrow$ `random(1,n)`
    if *r é primo* **then**
        return r

(a) Em função de n, qual a probabilidade de r (linha 3) ser primo?

(b) Baseado na resposta do item (a), qual o número esperado de execuções da linha 2 até o **primeiro sucesso**, ou seja, até o algoritmo devolver um primo?

Exercício 6. Use variáveis aleatórias indicadoras para resolver o seguinte problema, que é conhecido como o problema do verificador de chapéus. Cada um dos n clientes dá um chapéu para uma pessoa que verifica chapéuss em um restaurante. A pessoa que verifica chapéus devolve os chapéus para os clientes em ordem aleatória. Qual é o número esperado de clientes que recebem de volta seu próprio chapéu?

Exercício 7. Seja $A[1..n]$ um vetor de n números distintos. Se $i < j$ e $A[i] > A[j]$ então o par (i, j) é chamado de **inversão** de A. Suponha que os elementos de A formem uma permutação aleatória uniforme dos número naturais de 1 à n. Use variáveis aleatórias indicadoras para calcular o número esperado de inversões.

Exercício 8. Joãozinho, que faz ALG-2 com o Prof. Vignatti, quer avaliar experimentalmente o comportamento de alguns algoritmos de ordenação. Para isso, ele necessita gerar vetores com n números aleatórios **distintos**. Sua estratégia é a seguinte:

VetorAleatórioDistinto(vetor v, tamanho n)

para $i \leftarrow 1$ **até** n **faça**
  $v[i] \leftarrow$ `random(1,`n^3`)`

Mostre que todos os valores do vetor serão distintos com probabilidade pelo menos $1 - 1/n$.

Exercício 9. O algoritmo **bogosort** é um algoritmo de ordenação que sucessivamente gera permutações de sua entrada até encontrar uma que está ordenada. Supondo que as permutações são geradas aleatoriamente de maneira uniforme, calcule o tempo de execução esperado deste algoritmo.

Exercício 10. Considere o problema de buscar um elemento x em um vetor $v[1..n]$ de números distintos. Para resolver o problema, o seguinte algoritmo foi projetado:

BuscaAleatoria(vetor $v(1..n)$, elemento x)

enquanto *não foram avaliadas todas as posições de* v **faça**
  $i \leftarrow$ `random(1,`n`)`
  se $x = v[i]$ **então**
    retorna i
  retorna *"x não encontrado em v"*

Analise o tempo esperado do algoritmo dependendo se x está ou não no vetor v.