Exercícios - QuickSort: Intuição do Caso Médio e Versão Aleatorizada

Prof. André Vignatti

Exercício 1. Uma análise alternativa do tempo de execução do quicksort aleatorizado foca no tempo esperado de cada chamada recursiva a `QUICKSORT-ALEATORIZADO`, ao invés do número de comparações (como feito em aula).

(a) Explique que, dado um vetor de tamanho n, a probabilidade de um certo elemento ser escolhido como pivô é $1/n$. Use isso para definir a variável aleatória X_i, onde $X_i = 1$ se o i-ésimo menor elemento é escolhido como pivô, $X_i = 0$ caso contrário. Calcule $\mathrm{E}[X_i]$.

(b) Seja $T(n)$ uma variável aleatória que denota o tempo de execução do quicksort num vetor de tamanho n. Explique porque a seguinte igualdade é válida:

$$\mathrm{E}[T(n)] \;=\; \mathrm{E}\left[\sum_{q=1}^{n} X_q\Big(T(q-1) + T(n-q) + \Theta(n)\Big)\right].$$

(c) Mostre que podemos reescrever a equação do item (b) como

$$\mathrm{E}[T(n)] = \frac{2}{n}\sum_{q=2}^{n-1} \mathrm{E}[T(q)] + \Theta(n).$$

(Use as Dicas 1, 2, 3 e 4.)

(d) Mostre que

$$\sum_{k=2}^{n-1} k \log k \leq \frac{3}{4}n^2 \log n - \frac{1}{8}n^2.$$

(Use a Dica 5.)

(e) Usando o limitante do item (d), mostre que a recorrência do item (c) tem como solução $E[T(n)] = \Theta(n \log n)$. *(Use a Dica 6.)*

Dica 1. Use linearidade da esperança.

Dica 2. Se X e Y são duas variáveis aleatória independentes entre si, então

$$\mathrm{E}[X \cdot Y] = \mathrm{E}[X] \cdot \mathrm{E}[Y].$$

Dica 3. Em algum momento (para ficar mais visível), substitua o n por um número pequeno (por exemplo, 5) e "abra o somatório" (i.e., escreva o somatório sem usar Σ) para ver o que acontece.

Dica 4. Lembre-se dos valores da base da recorrência.

Dica 5. Divida o somatório em duas partes, um para $k = 2, 3, \ldots, \lceil n/2 \rceil - 1$ e um para $k = \lceil n/2 \rceil, \ldots, n-1$ (André: "Eu acho que dá pra mostrar por indução também").

Dica 6. Mostre, pelo método da substituição, que $\mathrm{E}[T(n)] \leq an \log n$ para n suficientemente grande e para alguma constante positiva a.