

Diretrizes Para a Escrita de Provas*

1 Introdução

Uma prova (matemática) de uma afirmação é simplesmente um argumento, apresentado como um ensaio, que convence o leitor da validade da afirmação. Portanto, se uma prova é aceitável ou não (por exemplo, se tem o nível certo de detalhes, se é escrita em bom estilo, etc.) é uma questão subjetiva, sem regras muito rígidas¹. Isso torna a tarefa de escrever boas provas (ou seja, provas que são corretas e facilmente compreendidas e verificadas) uma tarefa difícil.

Como você notará ao ler este documento, há muitas semelhanças entre escrever um programa de computador correto com bom estilo e escrever uma prova matemática correta com bom estilo. Infelizmente, no entanto, escrever uma boa prova é sem dúvida mais difícil, pois não há um compilador para apontar todos os erros de tempo de compilação que você tem (por exemplo, erros de sintaxe ou erros de verificação de tipo). Além disso, você não pode executar uma prova matemática em um computador para ver se ela produz a saída esperada. Todos os erros em uma prova matemática devem ser captados por você, o autor da prova, e isso requer um nível extra de atenção aos detalhes.

Nosso objetivo neste documento é dar-lhe sugestões sobre como escrever provas corretas e apresentadas de forma clara e ajudá-lo a detectar mais facilmente as falhas lógicas ou lacunas em seus argumentos. A maioria de nossas sugestões são de natureza estilística, porque uma prova escrita usando um bom estilo é uma prova que expõe seus bugs (se houver). Portanto, ao seguir nossas diretrizes, você tornará mais fácil para você e para todos entender e validar sua prova.

Matemática, ciências e artes têm ideias profundas, complicadas e bonitas. Nossa taxa de progresso como espécie depende da comunicação clara dessas idéias para que possam se espalhar e evoluir rapidamente. Esperamos que você busque clareza de pensamento e comunicação eficaz de ideias, não apenas nas provas que escreve, mas em todos os seus empreendimentos na vida.

2 Pontos de orientação

Esta seção contém os pontos de orientação (10 deles) que pedimos que você siga ao escrever suas provas. Antes de começarmos, segue abaixo um exemplo de “prova” que viola quase todos os pontos da diretriz. Sinta-se à vontade para consultar este exemplo conforme você avança nesta seção.

Problema: Mostre que $2^n > n$ para todos os inteiros $n \geq 1$.

Solução. (Os números das linhas são adicionados para facilitar a referência.)

1. $F_n = “2^n > n”$

*Texto traduzido com algumas adaptações de www.cs.cmu.edu/~. /15251/docs/proof-checklist.pdf

¹Uma observação está em ordem. É amplamente aceito que as provas matemáticas podem ser completamente formalizadas de uma forma que pode ser verificada mecanicamente, por ex. por um computador. No entanto, escrever provas de uma maneira completamente formal é como escrever programas de computador usando linguagem de máquina. Os matemáticos não comunicam provas nesse nível de detalhe.

2. $F_1 = "2 > 1"$
3. $F_n \implies F_{n+1} :$
4. $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n > 2 \cdot n$ (indução) $\geq n + 1$, porque $n \geq 1$
5. Portanto provado. ■

Lembre-se de que o exemplo acima é na verdade um exemplo de brinquedo². Alguns dos pontos que faremos a seguir têm mais significado e valor no contexto de provas mais sofisticadas, que são os tipos de provas que você escreverá.

A estrutura básica está certa?

Uma prova não é um cálculo ou uma sequência de símbolos matemáticos. Uma prova é um ensaio! É um argumento escrito em alguma linguagem humana (que, neste curso, é o português). Isso significa que sua prova deve consistir de parágrafos³, e cada parágrafo deve consistir de sentenças completas em português. Cada palavra e notação matemática deve fazer parte de uma frase completa. O único propósito da notação/símbolos matemáticos é tornar seus argumentos claros e concisos. Não iguale notação matemática com rigor ou formalismo. Você pode escrever uma prova completamente rigorosa e formal usando apenas palavras em português.

Imagens e/ou diagramas são incentivados quando ajudam a esclarecer seu argumento. No entanto, uma imagem ou diagrama não substitui um argumento real que precisa ser especificado em português.

Você está começando da maneira certa?

Frequentemente, a etapa mais importante para chegar a uma prova é ter certeza de que você entende exatamente quais suposições são fornecidas a você e qual declaração precisa ser derivada. Para tornar essas coisas absolutamente claras para você (o autor da prova) e o leitor, esperamos que o primeiro parágrafo de sua prova inclua uma reformulação das suposições dadas e o que precisa ser derivado. Descompacte as definições dos termos técnicos, se apropriado.

Outro componente importante do primeiro parágrafo é declarar sua estratégia de prova geral (por exemplo, prova por contradição, prova por indução, etc.) Para provas por contradição, negue explicitamente a afirmação que você está tentando provar e assum-a. Para provas por contraposição, a contraposição do enunciado deve ser explicitamente apresentada. Para provas por indução, o parâmetro sendo induzido deve ser claro.

Você leu sua prova em voz alta?

Quando alguém ler sua prova, a lerá como leria qualquer outro ensaio. Portanto, sua prova deve ter um bom fluxo e ser fácil de ler em voz alta mesmo com a notação matemática intercalada nas frases. Em particular, a notação matemática que você usa ou os diagramas que desenha não devem interromper o fluxo.

O propósito de cada frase é claro?

O propósito de cada frase deve ficar claro à medida que você a lê. Caso contrário, a frase pode ser muito confusa para o leitor e interromper o fluxo da prova. Um exemplo comum que viola esse ponto é fazer uma afirmação sem esclarecer se ela decorre das afirmações ou suposições anteriores ou se é uma afirmação que será provada posteriormente.

Com isso em mente, sempre que você escrever uma frase, certifique-se de que está claro se a frase é (i) uma suposição, (ii) uma afirmação que segue ou combina afirmações ou suposições previamente estabelecidas, (iii) uma afirmação que irá ser provado mais tarde, (iv) uma frase

²No entanto, este exemplo não foi inventado. Foi uma solução de lição de casa entregue há muitos anos.

³Evite usar parágrafos longos, pois eles prejudicam a clareza da exposição.

estabelecendo um objetivo, (v) uma frase introduzindo uma nova variável, terminologia, definição etc. (vi) parte de um exemplo ou ilustração, (vii) uma digressão, ou (viii) alguma outra coisa.

Uma estratégia que ajuda muito é estabelecer metas sempre que puder e dizer o que vai fazer antes de fazer.

Você está fornecendo o nível certo de detalhes?

Qual é o nível certo de detalhes a ser fornecido ao redigir uma prova? Esta é uma questão importante, cuja resposta depende do público da prova. É possível escrever uma prova que tenha todos os ingredientes certos, mas não tenha as justificativas adequadas para cada etapa. Então, o leitor deve verificar os detalhes por si mesmo e verificar se a prova está realmente correta. Esses tipos de provas não são incomuns, digamos, em publicações de ciência da computação teórica ou matemática. O autor pode conscientemente fornecer detalhes suficientes em uma prova para que as lacunas possam ser descobertas e verificadas por um especialista na área. Em nossa disciplina, entretanto, não aceitamos tais provas. Nenhum esforço/verificação extra do leitor deve ser necessário. Por esse motivo, é melhor errar por excesso de cautela e expor as coisas tanto quanto você achar razoável.

Para ajudar com isso, nossa recomendação é que você veja seu público como um colega de classe que não sabe como provar a afirmação para a qual está apresentando a prova. Lembre-se do seu público ao apresentar suas provas e forneça o nível apropriado de detalhes em seus argumentos. Seu colega de classe deve ser capaz de ler sua prova do início ao fim uma vez e estar convencido de que seu argumento está correto.

Uma coisa que pode ser difícil de avaliar é que, quando você pensa muito sobre um problema, desenvolve muita intuição no processo, e certas coisas que não eram tão triviais no início começam a se tornar óbvias para você. Isso é ótimo, porque indica que você está adquirindo uma compreensão mais profunda do problema. No entanto, quando chegar a hora de escrever sua prova, você deve ter em mente que o leitor não passou pelo processo mental pelo qual você passou tentando fazer a prova. Portanto, as intuições que você construiu não são necessariamente acessíveis ao seu leitor. E as coisas que são óbvias para você podem não ser óbvias para o leitor. Nem sempre é fácil, mas tente se colocar no lugar do leitor ao apresentar sua prova, e não pule detalhes que podem ser cruciais para entender seu argumento⁴.

Relacionado ao ponto acima, se em sua prova você estiver usando uma palavra que é sinônimo de “óbvio”, verifique novamente (com o seu público em mente) se ela é justificada. Em particular, uma declaração óbvia deve ser tal que uma prova disso venha à mente imediatamente, sem nenhum esforço. Em caso de dúvida se uma afirmação é considerada óbvia ou não, pergunte ao professor.

Você deve quebrar sua prova?

Quando você aprender a programar pela primeira vez, algo que será enfatizado continuamente é o valor de dividir o problema em partes menores e usar várias funções auxiliares. Se você escrever uma função muito longa ou executar mais de uma tarefa, é uma boa indicação de que você deve dividi-la em funções auxiliares menores. O uso liberal de funções auxiliares torna seu programa mais fácil de entender e depurar.

No sentido acima, as provas matemáticas são semelhantes a programas de computador. Sua prova deve ser dividida em lemas e/ou afirmações quando apropriado. Isso tornará a prova muito mais fácil de entender e será mais fácil localizar e corrigir quaisquer erros em potencial.

Se você estiver fazendo argumentos para várias instruções (a serem combinadas posteriormente), mas não estiver usando lemas ou afirmações, os argumentos devem ser claramente

⁴Segundo Steven Pinker, um cientista cognitivo, psicólogo, linguista e um autor de ciência popular, o maior motivo pelo qual muitas pessoas inteligentes escrevem muito mal é “a maldição do conhecimento”. As pessoas têm dificuldade em imaginar como é para outra pessoa não saber algo que sabem.

marcados e separados em parágrafos diferentes. Quer você use lemas/afirmações ou não, sua prova deve sempre ser organizada de forma clara.

A sua prova tem verificação de tipo?

Em programação, você está acostumado com a ideia de que todo objeto (parte dos dados) possui um tipo/classe. Por exemplo, muitas linguagens de programação têm um tipo inteiro e um tipo string. O tipo de dados determina quais tipos de operações você pode aplicar aos dados. Você pode, por exemplo, multiplicar dois inteiros, mas não pode multiplicar duas strings. Se você tentar multiplicar duas strings ou realizar qualquer outro tipo de operação que entre em conflito com o tipo de dados, obterá um erro em tempo de compilação e seu código não será executado.

Outra maneira de obter um erro em tempo de compilação é tentando acessar uma variável que não foi definida e inicializada. E em linguagens de programação com tipagem estática, você precisa especificar explicitamente o tipo de uma variável ao declará-la. Dessa forma, o compilador pode verificar o tipo de seu programa antes de executá-lo.

Semelhante à programação, cada objeto matemático tem um tipo (por exemplo, pode ser um número inteiro, um conjunto, uma função, etc.). E como na programação, o tipo de um objeto determina que tipo de operações você pode aplicar ao objeto. Por exemplo, você pode adicionar um elemento a um conjunto, mas não pode adicionar um elemento a uma função. Se você não respeitar essas restrições, dizemos que seu argumento não verifica o tipo. Um erro de verificação de tipo geralmente leva a uma frase sem sentido (mesmo que o autor possa não perceber isso).

Com isso em mente, certifique-se de que suas provas sempre sejam verificadas. Você deve agir como um compilador para encontrar qualquer coisa que possa violar as restrições de tipo. Para tornar isso mais fácil, sempre que você aprender sobre uma nova definição, anote o tipo de objeto que está sendo definido. Esta é uma das partes mais importantes de uma definição. E ao fazer referência a um objeto em sua prova, esteja ciente de seu tipo e certifique-se de que sua prova verifica o tipo.

Além do que foi dito acima, lembre-se de que todas as variáveis em suas provas devem ser introduzidas apropriadamente. Em particular, deve ficar claro se uma variável representa um objeto arbitrário (por exemplo, no contexto de um quantificador “para todos”), um objeto específico conhecido por existir (por exemplo, no contexto de um quantificador “existe”), ou algo senão (por exemplo, um valor específico). Em todos os casos, a variável deve ter um tipo específico e deve ficar claro qual é o tipo.

Por último, aqui está uma sugestão a ter em mente. Se em uma frase você estiver se referindo a uma variável, considere precedê-la com seu tipo se achar que isso torna as coisas mais claras e não adiciona redundância demais. Por exemplo, se x e y são variáveis que se referem a strings, você pode considerar alterar uma frase como “Concatenando x e y ...” para “Concatenando a string x e a string y ...”.

Suas referências são claras?

À medida que desenvolve um argumento em uma prova, você desejará se referir a (e usar) uma afirmação ou suposição previamente estabelecida. O uso implícito de afirmações ou suposições anteriores pode tornar difícil seguir a lógica da prova e sobrecarregar desnecessariamente o leitor. Portanto, evite referências implícitas e certifique-se de que esteja claro qual (is) parte (s) da prova você está usando para estabelecer a etapa atual de sua prova. Sempre que você faz uma referência, você deseja que seja muito fácil para o leitor localizar o que está sendo referenciado. Por exemplo, se houver uma equação importante que será referenciada posteriormente na prova, é uma boa ideia colocar essa equação em uma linha separada e rotulá-la. Dessa forma, você pode usar o rótulo da equação para se referir a ela, e o fato de estar em uma linha separada por si só tornará muito fácil para o leitor identificá-la.

Além do acima exposto, tenha cuidado ao usar palavras como “ele”, “isso” ou “estes” em sua prova. Enquanto você está escrevendo sua prova, ao usar tal palavra, você sabe perfeitamente a que essa palavra se refere na prova. No entanto, pergunte-se se também seria perfeitamente claro para o leitor. Em geral, é uma boa ideia tentar evitar essas palavras o máximo possível, mesmo que isso signifique que um certo nível de repetitividade seja introduzido nas palavras usadas.

Onde você está usando as suposições?

Quando você é solicitado a escrever uma prova, geralmente recebe certas suposições que considera verdadeiras (que é o seu ponto de partida) e tem uma declaração-alvo que deseja derivar. Conforme apontado no tópico acima “Você está começando da maneira certa?”, ele ajuda você e o leitor a definir explicitamente quais são as suposições fornecidas e qual é a declaração que precisa ser derivada. Uma vez que sua prova esteja completa, pergunte-se onde na prova as suposições estão sendo usadas. Se descobrir que você não está usando uma determinada suposição, você deve aumentar seu nível de alerta e verificar: a afirmação é mesmo verdadeira sem essa suposição? (Pode haver algumas exceções, mas quase sempre a resposta será não.) Se não for verdade e você não usar a suposição em sua prova, então sua prova está errada.

Quando alguém lê sua prova para verificá-la, estará tentando localizar onde as suposições são usadas na prova. Esta é uma verificação de sanidade rápida de que a prova não está faltando um componente essencial. Para tornar essa verificação fácil para o leitor (e também para você), você deve deixar claro em seu artigo onde e como as suposições estão sendo usadas em sua argumentação. No caso raro de uma determinada suposição não ser necessária para a prova, mencione isso explicitamente.

A ‘ideia da prova’ é uma boa ideia?

Como mencionado antes, uma prova é um argumento que convence o leitor de que uma determinada afirmação é verdadeira. Depois de ler a prova, o leitor pode sair com uma compreensão clara e intuitiva de por que a afirmação é verdadeira. Ou talvez não, mesmo que estejam perfeitamente convencidos de que a afirmação é realmente verdadeira.

Não queremos entrar em uma discussão filosófica sobre o que significa entender por que algo é verdadeiro. Mas, esperançosamente, podemos concordar que certas provas têm conteúdo mais explicativo do que outras.

É melhor escrever provas que tenham um forte conteúdo explicativo, especialmente quando essa qualidade torna a prova mais fácil de verificar. Por este motivo, você deve considerar a precedência de sua prova com uma seção de “Ideia de Prova” se a motivação/intuição por trás da prova não for transparente da prova ou se você sentir que tal adição ajudaria o leitor a entender a prova mais facilmente⁵.

3 Checklist

Para ajudá-lo a cumprir todos os pontos das diretrizes de redação de prova acima, forneceremos a seguinte lista de verificação para cada pergunta no livreto de dever de casa.

- A estrutura básica está certa?
- Você está começando da maneira certa?
- Você leu sua prova em voz alta?

⁵Observe que nenhuma das provas nas notas de aula tem uma seção “Ideia de prova” associada a elas porque a intuição por trás das provas é explicada durante as aulas.

- O propósito de cada frase é claro?
- Você está fornecendo o nível certo de detalhes?
- Você deve quebrar sua prova?
- A sua prova tem verificação de tipo?
- Suas referências são claras?
- Onde você está usando as suposições?
- A ‘ideia de prova’ é uma boa ideia?

Vamos agora voltar ao exemplo do início da Seção 2 e ver se há alguma caixa que possamos marcar na lista de verificação.

A estrutura básica está certa? É muito fácil ver que há uma violação grosseira desse ponto. O argumento não consiste em sentenças. Na verdade, não existe uma única frase totalmente formada em inglês.

Você está começando da maneira certa? Estamos perdendo uma reafirmação de quais são as suposições dadas e o que precisa ser derivado. (Sim, isso é meio pedante com o exemplo de brinquedo, mas ainda é valioso no contexto de exemplos mais complicados.) Além disso, embora a prova deva ser uma prova por indução, só aprendemos sobre isso no final do prova.

Você leu sua prova em voz alta? Se tentarmos ler o argumento em voz alta, ouviremos uma sequência incompreensível de palavras.

O propósito de cada frase é claro? Qual é o propósito da primeira linha? É uma definição? É uma afirmação? É uma suposição? Também podemos fazer essas perguntas para as linhas 2 a 4.

Você está fornecendo o nível certo de detalhes? Implícito na “prova” está a afirmação de que “ $2 \cdot n \geq n + 1$ porque $n \geq 1$ ”. Esta afirmação é verdadeira e seria qualificada como uma afirmação obviamente verdadeira. No entanto, há uma etapa que está sendo ignorada e que, se incluída, tornará a alegação mais imediatamente óbvia. Em particular, dizer “ $2 \cdot n = n + n \geq n + 1$, onde a desigualdade segue porque $n \geq 1$.” é preferível. Novamente, no contexto deste exemplo de brinquedo, nosso ponto pode soar muito pedante, mas é bom errar por excesso de cautela e soletrar as coisas o máximo possível. Em outro contexto/prova, uma etapa que você pula pode causar dor de cabeça ao leitor.

Você deve quebrar sua prova? Esta prova não requer nenhuma “função auxiliar”. É curto e bastante simples.

A sua prova tem verificação de tipo? A variável n não é introduzida corretamente. A partir da definição do problema, podemos inferir que o tipo de n é um número natural. No entanto, a variável ainda deve ser declarada corretamente. Por exemplo, F_n é suposto ser a declaração “ $2^n > n$ ”, mas aqui n é indefinido/não quantificado.

Suas referências são claras? Parece haver uma referência a uma hipótese de indução, mas é extremamente mal apresentada, uma vez que não há indicação de que a prova é por indução até que haja uma tentativa de fazer uma referência à hipótese de indução.

Onde você está usando as suposições? A parte “porque $n \geq 1$ ” é uma referência a uma suposição dada pela definição do problema, portanto, esperamos que o autor aponte isso explicitamente. Mais uma vez, este ponto pode parecer pedante, mas em provas mais longas e complicadas,

essas coisas realmente fazem a diferença.

A 'ideia da prova' é uma boa ideia? Como o problema fornecido e sua prova são bastante simples, uma seção de “ideia de prova” não é necessária.