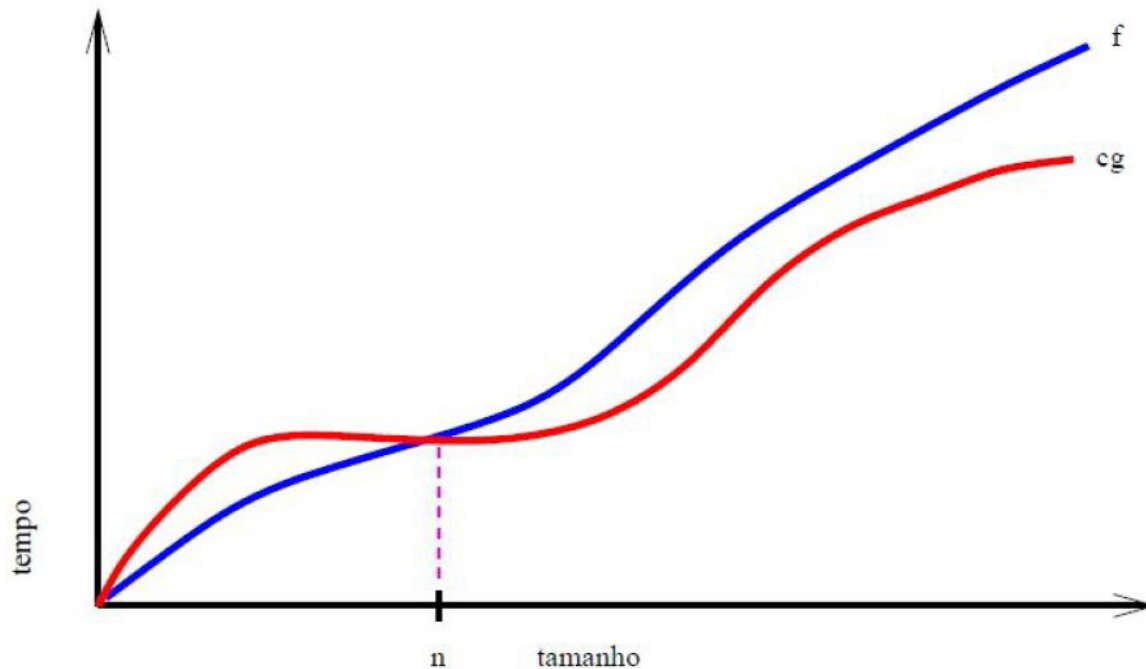


NOTAÇÃO ASSINTÓTICA (PARTE 2)

Análise de Algoritmos

Prof. André Vignatti

Definição. $\Omega(g(n)) = \{f(n) : \exists c > 0 \text{ e } n_0 > 0 \text{ tal que } f(n) \geq cg(n), \forall n \geq n_0\}$



Dizemos que $g(n)$ é um *limitante inferior assintótico* para $f(n)$

Exemplo. Seja $f(n) = 5$. É verdade que $f(n) = \Omega(1)$?

SIM. Tomando $c = 1, n_0 = 0$ então $5 \geq c$ para $n \geq n_0$.

Exemplo. Seja $f(n) = \sqrt{n}$. É verdade que $f(n) = \Omega(1)$?

SIM. Tomando $c = 1, n_0 = 1$ então $\sqrt{n} \geq c$ para $n \geq n_0$.

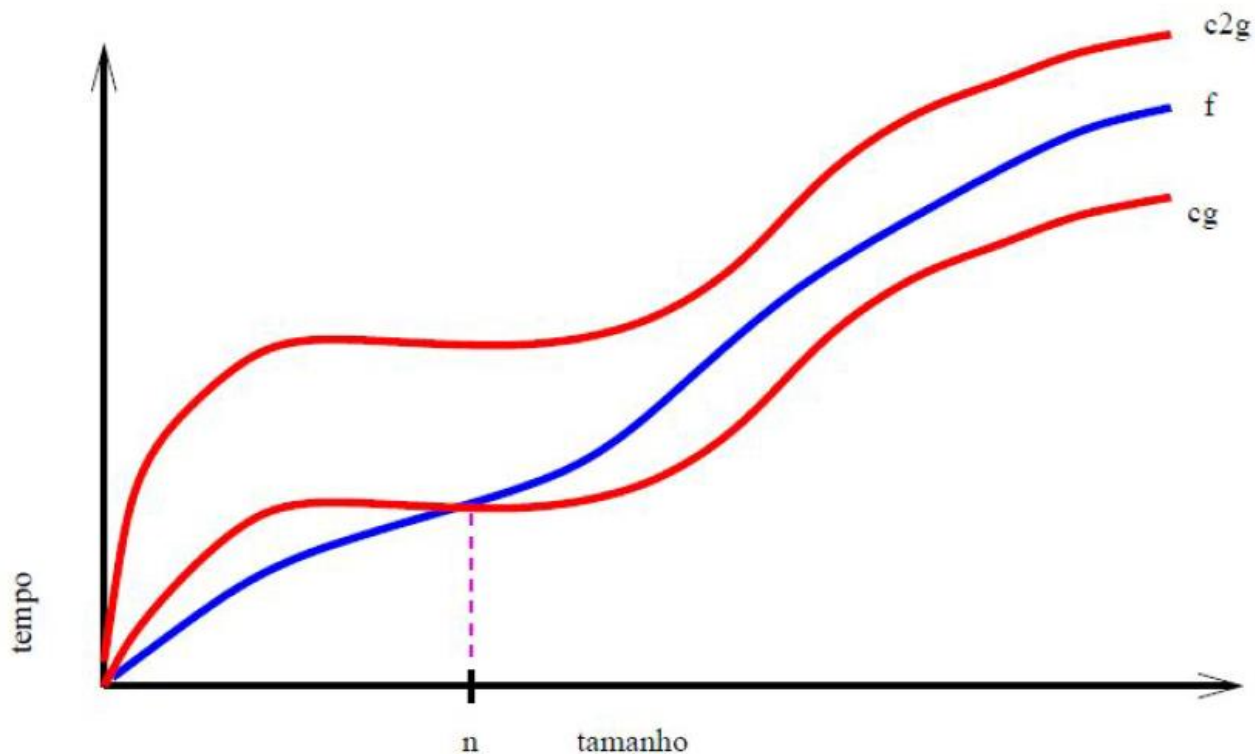
Exemplo. Seja $f(n) = 1/n$. É verdade que $f(n) = \Omega(1)$?

NÃO. Não existe c, n_0 pois $\frac{1}{n}$ sempre pode ser menor que uma constante fixa c

Exemplo. Funções em $\Omega(n^2)$:

- n^2
- $n^2 + n$
- $n^2 - n$
- $1000n^2 + 1000n$
- $1000n^2 - 1000n$
- n^3
- $n^{2.00000001}$
- $n^2 \log_2 \log_2 \log_2 n$
- 2^{2^n}

Definição. $f(n) \in \Theta(g(n))$ se $f(n) \in O(g(n))$ e $f(n) \in \Omega(g(n))$



Dizemos que $g(n)$ é um *limitante assintótico justo* (apertado) para $f(n)$

Definição equivalente:

$f(n) \in \Theta(g(n))$ se existem constantes $c_1, c_2 > 0$ e n_0 tal que $c_1g(n) \leq f(n) \leq c_2g(n)$, para todo $n \geq n_0$.

Exemplo. Mostre que a soma dos n primeiros inteiros é $\Theta(n^2)$

- **Limitante Superior:** $1 + 2 + \dots + n \leq n + n + \dots + n = n^2$. Então, tomando $c = 1, n_0 = 1$, a soma é $O(n^2)$.

- **Limitante Inferior:**

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \dots + n &\geq \lceil n/2 \rceil + (\lceil n/2 \rceil + 1) + \dots + n \\ &\geq \lceil n/2 \rceil + \lceil n/2 \rceil + \dots + \lceil n/2 \rceil \\ &= (n - \lceil n/2 \rceil + 1)\lceil n/2 \rceil \\ &\geq (n/2)(n/2) \\ &= n^2/4, \end{aligned}$$

assim, tomando $c = 1/4, n_0 = 1$ a soma é $\Theta(n^2)$.

Exemplo. Número Harmônico

O n -ésimo *número harmônico* é dado por

$$H(n) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}.$$

Vamos provar que $H_n = \Theta(\log n)$.

Comece com as potências de 2, $n = 2^k$, e divida H_{2^k} em k grupos, cada um com o dobro do tamanho do anterior:

$$\begin{aligned}
 H_{2^k} &= \sum_{j=1}^{2^k} \frac{1}{j} \\
 &= 1 + \\
 &\quad \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \\
 &\quad \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} \\
 &\quad \dots \\
 &\quad \frac{1}{2^{k-1}} + \frac{1}{2^{k-1} + 1} + \dots + \frac{1}{2^k - 1}
 \end{aligned}$$

Há também um termo extra, $\frac{1}{2^k}$.

Podemos limitar cada grupo acima e abaixo por uma constante limitando cada termo pela potência de 2 acima e abaixo dele.

$$\begin{array}{rcl}
 \frac{1}{2} & \leq 1 & \leq 1 \\
 \frac{1}{4} + \frac{1}{4} & \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{3} & \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\
 \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} & \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} & \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \\
 \dots & & \\
 \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k} + \dots + \frac{1}{2^k} & \leq \frac{1}{2^{k-1}} + \frac{1}{2^{k-1}+1} + \dots + \frac{1}{2^k-1} & \leq \frac{1}{2^{k-1}} + \frac{1}{2^{k-1}} + \dots + \frac{1}{2^{k-1}}
 \end{array}$$

Cada uma das somas à esquerda é $\frac{1}{2}$. Cada uma das somas da direita é 1.

Juntos,

$$\frac{1}{2}k + \frac{1}{2^k} \leq H_{2^k} \leq k + \frac{1}{2^k}$$

Escrito em termos de n ,

$$\frac{1}{2} \log_2 n \leq H_n \leq \log_2 n + 1$$

Então quando $n = 2^k$, $H_n = \Theta(\log n)$.

Para n que não são potências de 2, sendo n_- e n_+ as potências circundantes de 2 de n , observe que

$$n/2 < n_- < n < n_+ < 2n$$

temos, pela monotonicidade de H_n , que

$$\frac{1}{2} \log_2(n/2) < \frac{1}{2} \log_2 n_- < H_{n_-} < H_n < H_{n_+} < \log_2 n_+ + 1 < \log_2(2n) + 1$$

$$\frac{1}{2} \log_2 n - \frac{1}{2} < H_n < \log_2 n + 2$$

E portanto $H_n = \Theta(\log n)$.

Erros comuns:

Knuth observou: muito usam \mathcal{O} como se fosse Θ !

- Lembre-se disso quando você ver a notação \mathcal{O} sendo usada!

Outro **erro clássico**: \mathcal{O} serve para pior caso, Ω para melhor caso.