RESOLVENDO RECORRÊNCIAS: MÉTODO DA ITERAÇÃO

Prof. André Vignatti

MÉTODO DA ITERAÇÃO - IDEIA

Método da iteração:

- Serve para **adivinhar** a resposta!

MÉTODO DA ITERAÇÃO - IDEIA

Método da iteração:

- Serve para **adivinhar** a resposta!
- Precisa fazer muitas contas!

MÉTODO DA ITERAÇÃO - IDEIA

Método da iteração:

- Serve para **adivinhar** a resposta!
- Precisa fazer muitas contas!
- Precisa conhecer limitantes para várias somatórias.

Ideia: “abrir” (iterar) a recorrência e escrevê-la como uma somatória de termos que dependem apenas de n e das condições iniciais.

Ideia: “abrir” (iterar) a recorrência e escrevê-la como uma somatória de termos que dependem apenas de n e das condições iniciais.

Diferença de CI237: agora, em CI165, as recorrências tem soluções **assintóticas**

Ideia: “abrir” (iterar) a recorrência e escrevê-la como uma somatória de termos que dependem apenas de n e das condições iniciais.

Diferença de CI237: agora, em CI165, as recorrências tem soluções **assintóticas**

- Ou seja, não precisamos da solução **exata** (**Eeeeebbaaa!!**)

EXEMPLO

Considere a recorrência

$$
\begin{array}{rcll}
T(n) & = & b & \text{para } n \leq 3, \\
T(n) & = & 3T(\lfloor n/4 \rfloor) + n & \text{para } n \geq 4.
\end{array}
$$

Iterando a recorrência obtemos

$$T(n) = n + 3T(\lfloor n/4 \rfloor)$$

Iterando a recorrência obtemos

$$\begin{aligned} T(n) &= n + 3T(\lfloor n/4 \rfloor) \\ &= n + 3(\lfloor n/4 \rfloor + 3T(\lfloor n/16 \rfloor)) \end{aligned}$$

Iterando a recorrência obtemos

$$\begin{aligned}
T(n) &= n + 3T(\lfloor n/4 \rfloor) \\
&= n + 3(\lfloor n/4 \rfloor + 3T(\lfloor n/16 \rfloor)) \\
&= n + 3(\lfloor n/4 \rfloor + 3(\lfloor n/16 \rfloor + 3T(\lfloor n/64 \rfloor)))
\end{aligned}$$

Iterando a recorrência obtemos

$$
\begin{aligned}
T(n) &= n + 3T(\lfloor n/4 \rfloor) \\
&= n + 3(\lfloor n/4 \rfloor + 3T(\lfloor n/16 \rfloor)) \\
&= n + 3(\lfloor n/4 \rfloor + 3(\lfloor n/16 \rfloor + 3T(\lfloor n/64 \rfloor))) \\
&= n + 3\lfloor n/4 \rfloor + 9\lfloor n/16 \rfloor + 27T(\lfloor n/64 \rfloor)
\end{aligned}
$$

Iterando a recorrência obtemos

$$
\begin{aligned}
T(n) &= n + 3T(\lfloor n/4 \rfloor) \\
&= n + 3(\lfloor n/4 \rfloor + 3T(\lfloor n/16 \rfloor)) \\
&= n + 3(\lfloor n/4 \rfloor + 3(\lfloor n/16 \rfloor + 3T(\lfloor n/64 \rfloor))) \\
&= n + 3\lfloor n/4 \rfloor + 9\lfloor n/16 \rfloor + 27T(\lfloor n/64 \rfloor) \\
&\;\;\vdots
\end{aligned}
$$

Iterando a recorrência obtemos

$$
\begin{aligned}
T(n) &= n + 3T(\lfloor n/4 \rfloor) \\
&= n + 3(\lfloor n/4 \rfloor + 3T(\lfloor n/16 \rfloor)) \\
&= n + 3(\lfloor n/4 \rfloor + 3(\lfloor n/16 \rfloor + 3T(\lfloor n/64 \rfloor))) \\
&= n + 3\lfloor n/4 \rfloor + 9\lfloor n/16 \rfloor + 27T(\lfloor n/64 \rfloor) \\
&\ \ \vdots \\
&= 3^0\lfloor n/4^0 \rfloor + 3^1\lfloor n/4^1 \rfloor + \ldots + 3^{i-1}\lfloor n/4^{i-1} \rfloor + 3^i T(\lfloor n/4^i \rfloor)
\end{aligned}
$$

Iterando a recorrência obtemos

$$
\begin{aligned}
T(n) &= n + 3T(\lfloor n/4 \rfloor) \\
&= n + 3(\lfloor n/4 \rfloor + 3T(\lfloor n/16 \rfloor)) \\
&= n + 3(\lfloor n/4 \rfloor + 3(\lfloor n/16 \rfloor + 3T(\lfloor n/64 \rfloor))) \\
&= n + 3\lfloor n/4 \rfloor + 9\lfloor n/16 \rfloor + 27T(\lfloor n/64 \rfloor) \\
&\ \vdots \\
&= 3^0\lfloor n/4^0 \rfloor + 3^1\lfloor n/4^1 \rfloor + \ldots + 3^{i-1}\lfloor n/4^{i-1} \rfloor + 3^i T(\lfloor n/4^i \rfloor) \\
&= \sum_{j=0}^{i-1} 3^j \lfloor n/4^j \rfloor + 3^i T(\lfloor n/4^i \rfloor)
\end{aligned}
$$

Iterando a recorrência obtemos

$$\begin{aligned}
T(n) &= n + 3T(\lfloor n/4 \rfloor) \\
&= n + 3(\lfloor n/4 \rfloor + 3T(\lfloor n/16 \rfloor)) \\
&= n + 3(\lfloor n/4 \rfloor + 3(\lfloor n/16 \rfloor + 3T(\lfloor n/64 \rfloor))) \\
&= n + 3\lfloor n/4 \rfloor + 9\lfloor n/16 \rfloor + 27T(\lfloor n/64 \rfloor) \\
&\ \ \vdots \\
&= 3^0\lfloor n/4^0 \rfloor + 3^1\lfloor n/4^1 \rfloor + \ldots + 3^{i-1}\lfloor n/4^{i-1} \rfloor + 3^i T(\lfloor n/4^i \rfloor) \\
&= \sum_{j=0}^{i-1} 3^j \lfloor n/4^j \rfloor + 3^i T(\lfloor n/4^i \rfloor) \\
&\leq \sum_{j=0}^{i-1} 3^j n/4^j + 3^i T(n/4^i)
\end{aligned}$$

Quando parar?

Quando $n/4^i \leq 3$

$\boxed{\text{Quando parar?}}$

Quando $n/4^i \leq 3$

Ou seja, quando $i = \log_4 n$

$\boxed{\text{Quando parar?}}$

Quando $n/4^i \leq 3$

Ou seja, quando $i = \log_4 n$

(a rigor não está certo, mas só queremos um "chute")

Assim

$$T(n) \leq \sum_{j=0}^{\log_4 n - 1} 3^j n/4^j + 3^{\log_4 n} T(n/4^{\log_4 n})$$

Assim

$$T(n) \leq \sum_{j=0}^{\log_4 n - 1} 3^j n/4^j + 3^{\log_4 n} T(n/4^{\log_4 n})$$

$$= \sum_{j=0}^{\log_4 n - 1} (3/4)^j n + 3^{\log_4 n} T(1)$$

Assim

$$
\begin{aligned}
T(n) &\leq \sum_{j=0}^{\log_4 n - 1} 3^j n/4^j + 3^{\log_4 n} T(n/4^{\log_4 n}) \\
&= \sum_{j=0}^{\log_4 n - 1} (3/4)^j n + 3^{\log_4 n} T(1) \\
&= n \sum_{j=0}^{\log_4 n - 1} (3/4)^j + n^{\log_4 3} b
\end{aligned}
$$

Assim

$$
\begin{aligned}
T(n) &\le \sum_{j=0}^{\log_4 n-1} 3^j n/4^j + 3^{\log_4 n} T(n/4^{\log_4 n}) \\
&= \sum_{j=0}^{\log_4 n-1} (3/4)^j n + 3^{\log_4 n} T(1) \\
&= n \sum_{j=0}^{\log_4 n-1} (3/4)^j + n^{\log_4 3} b \\
&\le n \sum_{j=0}^{\infty} (3/4)^j + bn
\end{aligned}
$$

Assim

$$
\begin{aligned}
T(n) &\leq \sum_{j=0}^{\log_4 n-1} 3^j n/4^j + 3^{\log_4 n} T(n/4^{\log_4 n}) \\
&= \sum_{j=0}^{\log_4 n-1} (3/4)^j n + 3^{\log_4 n} T(1) \\
&= n \sum_{j=0}^{\log_4 n-1} (3/4)^j + n^{\log_4 3} b \\
&\leq n \sum_{j=0}^{\infty} (3/4)^j + bn \\
&= 4n + bn
\end{aligned}
$$

Assim

$$
\begin{aligned}
T(n) &\leq \sum_{j=0}^{\log_4 n - 1} 3^j n/4^j + 3^{\log_4 n} T(n/4^{\log_4 n}) \\
&= \sum_{j=0}^{\log_4 n - 1} (3/4)^j n + 3^{\log_4 n} T(1) \\
&= n \sum_{j=0}^{\log_4 n - 1} (3/4)^j + n^{\log_4 3} b \\
&\leq n \sum_{j=0}^{\infty} (3/4)^j + bn \\
&= 4n + bn \\
&= O(n).
\end{aligned}
$$

REMOVENDO PISOS E TETOS

- Lidar com pisos e tetos é chato!

REMOVENDO PISOS E TETOS

- Lidar com pisos e tetos é chato!

- Pode-se remover pisos e tetos se supor que a recorrência é definida apenas para potências de um número, por exemplo, $n = 4^i$.

REMOVENDO PISOS E TETOS

- Lidar com pisos e tetos é chato!

- Pode-se remover pisos e tetos se supor que a recorrência é definida apenas para potências de um número, por exemplo, $n = 4^i$.

  - $\boxed{\text{– Mas a recorrência deve ser provada para todo } \mathbb{N}}$

REMOVENDO PISOS E TETOS

- Lidar com pisos e tetos é chato!

- Pode-se remover pisos e tetos se supor que a recorrência é definida apenas para potências de um número, por exemplo, $n = 4^i$.

  - Mas a recorrência deve ser provada para todo $\mathbb{N}$

- Então,

  (1) adivinha um chute usando potências

REMOVENDO PISOS E TETOS

- Lidar com pisos e tetos é chato!

- Pode-se remover pisos e tetos se supor que a recorrência é definida apenas para potências de um número, por exemplo, $n = 4^i$.

  – Mas a recorrência deve ser provada para todo $\mathbb{N}$

- Então,

  (1) **adivinha** um chute usando potências

  (2) mas **prova-se** o chute para todo $\mathbb{N}$ usando indução

FINALMENTE... VAMOS PROVAR NOSSO CHUTE

Vamos provar usando o método da substituição (indução)

$$\begin{aligned} T(n) &= b && \text{para } n \leq 3, \\ T(n) &= 3T(\lfloor n/4 \rfloor) + n && \text{para } n \geq 4. \end{aligned}$$

Chuto que $T(n) \leq cn$

$$
\begin{aligned}
T(n) &= 3T(\lfloor n/4 \rfloor) + n \\
&\leq 3c\lfloor n/4 \rfloor + n \\
&\leq 3c(n/4) + n \\
&\leq cn
\end{aligned}
$$

onde a última desigualdade vale se $c \geq 4$.

$\blacksquare$