COMPLEXIDADE DE TEMPO ALEATORIZADA

Análise de Algoritmos

Prof. André Vignatti

VARIÁVEL ALEATÓRIA

Definição. *Uma* ***variável aleatória*** *(v.a.) X sobre espaço Ω é uma função* $X : \Omega \to \mathbb{R}$.

Exemplo. Considere o lançamento de dois dados e uma v.a. X que representa a soma dos valores dos dois dados.

- X pode assumir 11 valores possíveis: $X \in \{2, 3, \ldots, 12\}$
- Há 36 possibilidades p/ dados: {(⚀, ⚀) , (⚀, ⚁) , … , (⚅, ⚅)}

Dado v.a. X e $a \in \mathbb{R}$, o evento "$X = a$" representa o conjunto $\{e \in \Omega : X(e) = a\}$. Assim,

$$\Pr(X = a) = \sum_{e \in \Omega : X(e) = a} \Pr(e)$$

Exemplo. Evento $X = 4$ tem 3 eventos básicos: $\{$(⚀, ⚂), (⚁, ⚁), (⚂, ⚀)$\}$

Portanto

$$\Pr(X = 4) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

Definição. *Duas v.a. X e Y são **independentes** se e somente se*

$$\Pr(\ (X = x) \cap (Y = y)\ ) \quad = \quad \Pr(X = x) \cdot \Pr(Y = y) \quad \forall x, y$$

ESPERANÇA

Definição (Esperança). *A* ***esperança*** *de uma v.a.* X *é dada por*

$$\mathrm{E}[X] = \sum_i i \cdot \Pr(X = i),$$

onde a soma é sobre todos valores assumidos por X*.*

Exemplo. Considere o exemplo do lance de dois dados e a v.a. X igual a soma dos valores obtidos.

$$\mathrm{E}[X] = 2\frac{1}{36} + 3 \cdot \frac{2}{36} + \cdots + 12 \cdot \frac{1}{36} = 7$$

Note que na soma do exemplo acima, devemos saber o número de eventos para cada valor de X.

Se X é uma v.a. que só assume valores 0 e 1, então $\mathrm{E}[X] = Pr[X = 1]$

LINEARIDADE DA ESPERANÇA

Teorema (Linearidade da Esperança). *Para qualquer coleção finita de v.a. $X_1, \ldots, X_n$ com esperanças finitas*

$$\mathrm{E}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1} \mathrm{E}[X_i]$$

Observação. Não há restrições sobre a independência das v.a. $X_1, \ldots, X_n$

Lema. *Dados v.a. X e constante c, temos* $\mathrm{E}[c \cdot X] = c \cdot \mathrm{E}[X]$

Exemplo. Considere o exemplo do lance de dois dados.

- X_1: v.a. do valor do primeiro dado.
- X_2: v.a. do valor do segundo dado.
- X: v.a. da soma dos valores dos dois dados.

Note que $X = X_1 + X_2$. Assim,

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[X] &= \mathrm{E}[X_1 + X_2] \\ &= \mathrm{E}[X_1] + \mathrm{E}[X_2] \\ &= 2 \cdot \sum_{i=1}^{6} i \cdot \frac{1}{6} \\ &= 7 \end{aligned}$$

Conclusão: Ficou mais fácil calcular $\mathrm{E}[X]$ com linearidade da esperança.

ESPERANDO O PRIMEIRO SUCESSO

Temos uma moeda viciada: CARA com prob. p, COROA com prob. $1 - p$

Quantas jogadas são **esperadas** até tirar a primeira CARA?

Seja X a v.a. do número de jogadas até a primeira CARA

$$\begin{aligned}
\Pr(X = 1) &= p \\
\Pr(X = 2) &= (1-p)p \\
\Pr(X = 3) &= (1-p)(1-p)p \\
&\vdots \\
\Pr(X = j) &= (1-p)^{j-1}p
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[X] =& \sum_{j=0}^{\infty} j \cdot \Pr[X = j] \ = \ \sum_{j=0}^{\infty} j(1-p)^{j-1}p \ = \ \frac{p}{1-p}\sum_{j=0}^{\infty} j(1-p)^{j} \\
=& (\text{ver eq. A.8 do CLRS}) \ \frac{p}{1-p}\frac{(1-p)}{p^2} \ = \ \frac{1}{p}.
\end{aligned}$$

Podemos resumir tudo no seguinte resultado:

Teorema. *Num experimento com jogadas independentes, cada jogada com prob. p de sucesso, o número* ***esperado*** *de jogadas até o primeiro sucesso é $1/p$.*

ADIVINHANDO CARTAS

JOGO: embaralhar n cartas; virar elas **uma a uma**; tentar **adivinhar** cada carta.

adivinhar sem memória: não lembramos das cartas já viradas

Nossa solução: chutamos **aleatoriamente** uma carta, com prob. $1/n$

- Seja v.a. $X_i = 1$ se a i-ésima predição está correta, $X_i = 0$ caso contrário
- Seja v.a. $X =$ número de predições corretas $= X_1 + \ldots + X_n$

Teorema. *O número esperado de vezes que adivinhamos corretamente é* 1

Demonstração.

- $\mathrm{E}[X_i] = \Pr[X_i = 1] = 1/n$
- (lin. da esperança) $\mathrm{E}[X] = \mathrm{E}[X_1] + \ldots + \mathrm{E}[X_n]$

$$= 1/n + \ldots + 1/n$$

$$= 1$$

$\square$

adivinhar memorizando: conseguimos lembrar das cartas já viradas

Nossa solução: na i-ésima predição, chutamos uma das $n - i + 1$ cartas restantes.

Teorema. *O número esperado de vezes que adivinhamos corretamente é* $\Theta(\log n)$

Demonstração.

- $\mathrm{E}[X_i] = \Pr[X_i = 1] = 1/(n - i + 1)$
- (lin. da esperança) $\mathrm{E}[X] = \mathrm{E}[X_1] + \ldots + \mathrm{E}[X_n] = 1/n + \ldots + 1/2 + 1/1 = H(n) = \Theta(\log n)$.

A última igualdade segue da desigualdade A.14 e exercício A.2-3 de CLRS

$\blacksquare$

COLECIONADOR DE CUPONS

Colecionando Cupons: Cada caixa de cereal vem um **cupom**. No total, há n cupons diferentes. **Quantas** caixas deve-se comprar para ter todos os cupons?

- Ideia: **Progredimos** quando conseguimos um cupom novo
- Objetivo: progredir n vezes

Qual a probabilidade de progredir?

- Se já tem j cupons, obtém-se um novo com probabilidade $(n-j)/n$.

Quantas caixas para **progredir**?

- Fase j = num. de caixas entre ter j e $j+1$ cupons diferentes.
- Seja X_j = número de caixas compradas na fase j.
- Na fase j, **esperamos o primeiro sucesso** de um evento com probabilidade $(n-j)/n$.
- Então, $\mathrm{E}[X_j] = n/(n-j)$.

Teorema. *O número esperado de caixas necessárias é* $\Theta(n \log n)$

Demonstração. Seja $X = X_0 + \ldots + X_{n-1}$ o número total de caixas compradas. Então,

$$\mathrm{E}[X] = \sum_{j=0}^{n-1} \mathrm{E}[X_j] = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{n}{n-j} = n \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = nH(n)$$

$\square$

PORQUÊ ISSO TEM A VER COM ALGORITMOS?

PORQUÊ?

PORQUÊ?

PORQUÊ?

PORQUÊ?

PORQUÊ?

```
Algoritmo DEVOLVE_PRIMO(inteiro grande n)
    Enquanto TRUE
        r ← random(1,n)
        Se r é primo
            Devolva r
```

```
início
    s ← 0
    para i ← 1 até n faça
        r ← random(1,n)
        se r ≤ i então
            s ← s + 1
    retorna s
```