QUICKSORT ALEATORIZADO

Análise de Algoritmos

Prof. André Vignatti

AULA PASSADA: QUICKSORT

$\leq x$	$\mathbf{x}$	$> x$

Particiona(v, a, b)

$m \leftarrow a - 1$
$x \leftarrow v[b]$
Para $i \leftarrow a$ to b
  Se $v[i] \leq x$
    $m \leftarrow m + 1$
    Troca(v, m, i)
Devolva m

Quicksort(v, a, b)

Se $a < b$
  $m \leftarrow$ Particiona(v, a, b)
  Quicksort$(v, a, m - 1)$
  Quicksort$(v, m + 1, b)$

CONHEÇA O ADVERSÁRIO

um mundo cruel:

- entrada **diabolicamente planejada**
- abordagem de **pior caso**
- seremos **honestos**: se algoritmo é bom, nenhuma entrada tem mal desempenho

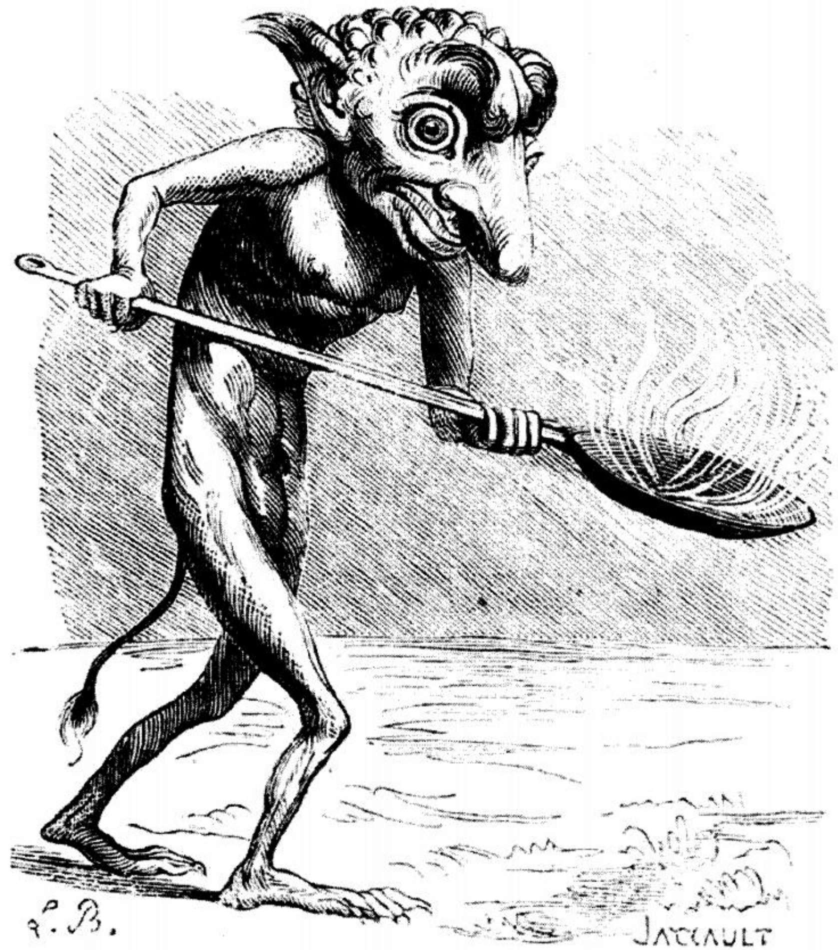

FIGURE 2.1: The adversary bringing us a really stinky instance.

CONHEÇA O ADVERSÁRIO

um mundo cruel:

- entrada **diabolicamente planejada**
- abordagem de **pior caso**
- seremos **honestos**: se algoritmo é bom, nenhuma entrada tem mal desempenho

abordagens alternativas:

- **melhor caso**
- **caso médio**

$\Big\}$ **ignora o adversário**

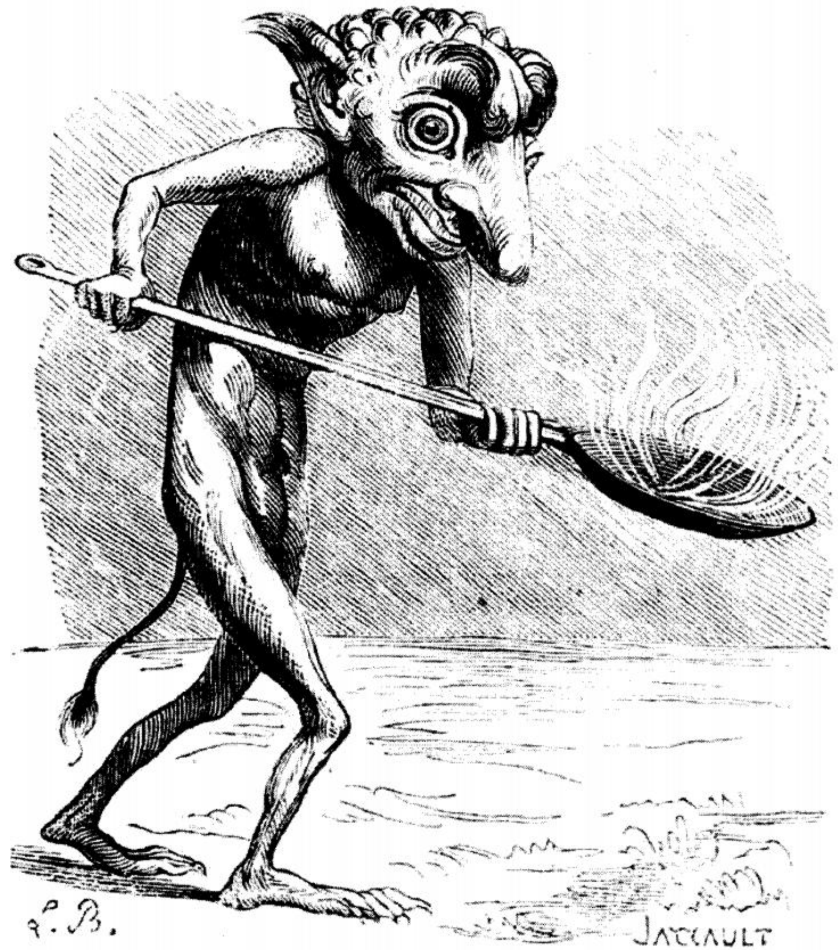

FIGURE 2.1: The adversary bringing us a really stinky instance.

CONHEÇA O ADVERSÁRIO

um mundo cruel:

- entrada **diabolicamente planejada**
- abordagem de **pior caso**
- seremos **honestos**: se algoritmo é bom, nenhuma entrada tem mal desempenho

abordagens alternativas:

- **melhor caso**
- **caso médio**

ignora o adversário

- **caso esperado**

engana o adversário

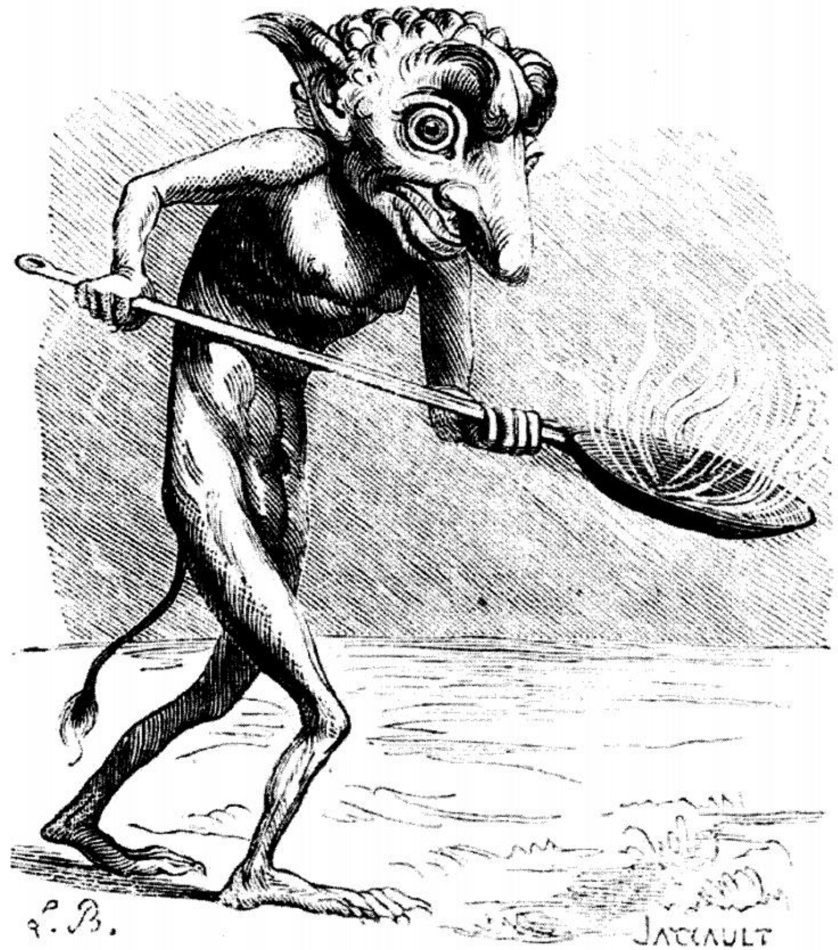

FIGURE 2.1: The adversary bringing us a really stinky instance.

QUICKSORT

Quicksort:

- Pior caso: $\Theta(n^2)$
- Na prática: $\Theta(n \log n)$, ganha do Mergesort (que não tem pior/melhor caso)
- **Caso médio** assume **todas entradas equiprováveis**: mentira!

$$\boxed{\text{Usaremos } \textbf{aleatorização} \text{ no QuickSort}}$$

Ideia: Escolher o pivô **aleatoriamente**

QUICKSORT ALEATORIZADO

ParticioneAle(v, a, b)

$i \leftarrow$ **random**(a, b)

Troca(v, i, b)

devolva Particione(v, a, b)

QuickSortAle(v, a, b)

se $a < b$

entao $m \leftarrow$ ParticioneAle(v, a, b)

QuickSortAle$(v, a, m - 1)$

QuickSortAle$(v, m + 1, b)$

É **esperado**, dividir o vetor de maneira **bem balanceada**.

O QUE VAMOS CONTAR?

O QUE VAMOS CONTAR?

recorrência: o custo do algoritmo é no Particiona

O QUE VAMOS CONTAR?

recorrência: o custo do algoritmo é no Particiona

- A **operação fundamental** do Particiona (veja o pseudo=código) é a comparação (if).

O QUE VAMOS CONTAR?

recorrência: o custo do algoritmo é no Particiona

- A **operação fundamental** do Particiona (veja o pseudo=código) é a comparação (if).

Então, vamos contar **todas** as comparações feitas pelo algoritmo

O QUE VAMOS CONTAR?

recorrência: o custo do algoritmo é no Particiona

- A **operação fundamental** do Particiona (veja o pseudo=código) é a comparação (if).

Então, vamos contar **todas** as comparações feitas pelo algoritmo

Supomos elementos **distintos**

Seja $z_1 < z_2 < \ldots < z_n$ os elementos ordenados

Seja X_{ij} v.a. tal que: z_j:

$$X_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } z_i \text{ é comparado com } z_j \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Seja X_{ij} v.a. tal que: z_j:

$$X_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } z_i \text{ é comparado com } z_j \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Fatos Importantes:

Seja X_{ij} v.a. tal que: z_j:

$$X_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } z_i \text{ é comparado com } z_j \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Fatos Importantes:

1. Comparações só ocorrem com o pivô.

Seja X_{ij} v.a. tal que: z_j:

$$X_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } z_i \text{ é comparado com } z_j \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Fatos Importantes:

1. Comparações só ocorrem com o pivô.

2. Após `Particione`, o pivô não participa de outras comparações até o fim da execução.

Seja X_{ij} v.a. tal que: z_j:

$$X_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } z_i \text{ é comparado com } z_j \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Fatos Importantes:

1. Comparações só ocorrem com o pivô.

2. Após `Particione`, o pivô não participa de outras comparações até o fim da execução.

3. Um par de elementos é comparado no **máximo** uma vez!

Seja X_{ij} v.a. tal que: z_j:

$$X_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } z_i \text{ é comparado com } z_j \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Fatos Importantes:

1. Comparações só ocorrem com o pivô.

2. Após `Particione`, o pivô não participa de outras comparações até o fim da execução.

3. Um par de elementos é comparado no **máximo** uma vez!

4. Assim, $X_{ij} = X_{ji}$. Para evitar contar duas vezes, vamos somente contar X_{ij} se $i < j$.

Então, o **número total de comparações** X **é**

$$X = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} X_{ij}.$$

Então, o **número total de comparações X é**

$$X = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} X_{ij}.$$

e o número **esperado** de comparações é $E[X]$

$$E[X] = E\left[\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} X_{ij}\right] = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} E[X_{ij}]$$

Então, o **número total de comparações** X **é**

$$X = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} X_{ij}.$$

e o número **esperado** de comparações é $E[X]$

$$E[X] = E\left[\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} X_{ij}\right] = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} E[X_{ij}]$$

Como X_{ij} é uma variável aleatória binária,

$$\begin{aligned} E[X_{ij}] &= 0 \cdot \Pr(z_i \text{ não ser comparado com } z_j) + \\ & \quad 1 \cdot \Pr(z_i \text{ ser comparado com } z_j) \\ &= \Pr(z_i \text{ ser comparado com } z_j) \end{aligned}$$

Então,

$$E[X] = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \Pr(z_i \text{ ser comparado com } z_j)$$

Agora basta encontrar a probabilidade de dois elementos serem comparados.

Considere a escolha do pivô e a comparação entre z_i e z_j:

$$\underbrace{z_1, z_2, \ldots, z_{i-1}}_{\text{posterga}}, \mathbf{z_i}, \underbrace{z_{i+1}, \ldots, z_{j-1}}_{\textbf{não comp.}}, \mathbf{z_j}, \underbrace{z_{j+1}, \ldots, z_n}_{\text{posterga}}$$

Considere a escolha do pivô e a comparação entre z_i e z_j:

$$\underbrace{z_1, z_2, \ldots, z_{i-1}}_{\text{posterga}}, \mathbf{z_i}, \underbrace{z_{i+1}, \ldots, z_{j-1}}_{\textbf{não comp.}}, \mathbf{z_j}, \underbrace{z_{j+1}, \ldots, z_n}_{\text{posterga}}$$

- Se algum **azul** é escolhido como pivô, z_i e z_j **nunca mais** serão comparados **(pois ficarão em particões diferentes)**

Considere a escolha do pivô e a comparação entre z_i e z_j:

$$\underbrace{z_1, z_2, \ldots, z_{i-1}}_{\text{posterga}}, \mathbf{z_i}, \color{blue}{\underbrace{z_{i+1}, \ldots, z_{j-1}}_{\textbf{não comp.}}}, \mathbf{z_j}, \underbrace{z_{j+1}, \ldots, z_n}_{\text{posterga}}$$

- Se algum **azul** é escolhido como pivô, z_i e z_j **nunca mais** serão comparados **(pois ficarão em particões diferentes)**

- Para serem comparados, ou z_i ou z_j devem ser escolhidos como pivô **ANTES** de algum **azul**.

Seja $Z_{ij} = \{z_i, z_{i+1}, \ldots, z_j\}$. Assim,

$Pr(z_i \text{ ser comparado com } z_j)$

Seja $Z_{ij} = \{z_i, z_{i+1}, \ldots, z_j\}$. Assim,

$$
\begin{aligned}
&Pr(z_i \text{ ser comparado com } z_j) \\
&\qquad = \Pr(z_i \text{ ou } z_j \text{ é escolhido como pivô primeiro em } Z_{ij})
\end{aligned}
$$

Seja $Z_{ij} = \{z_i, z_{i+1}, \ldots, z_j\}$. Assim,

$$
\begin{aligned}
&Pr(z_i \text{ ser comparado com } z_j) \\
&\qquad = \Pr(z_i \text{ ou } z_j \text{ é escolhido como pivô primeiro em } Z_{ij}) \\
&\qquad = \Pr(z_i \text{ é escolhido como pivô primeiro em } Z_{ij}) + \\
&\qquad\quad\; \Pr(z_j \text{ é escolhido como pivô primeiro em } Z_{ij})
\end{aligned}
$$

Seja $Z_{ij} = \{z_i, z_{i+1}, \ldots, z_j\}$. Assim,

$$
\begin{aligned}
Pr(z_i \text{ ser comparado com } z_j) & \\
&= \Pr(z_i \text{ ou } z_j \text{ é escolhido como pivô primeiro em } Z_{ij}) \\
&= \Pr(z_i \text{ é escolhido como pivô primeiro em } Z_{ij}) + \\
&\quad \Pr(z_j \text{ é escolhido como pivô primeiro em } Z_{ij}) \\
&= \frac{1}{j-i+1} + \frac{1}{j-i+1}
\end{aligned}
$$

Seja $Z_{ij} = \{z_i, z_{i+1}, \ldots, z_j\}$. Assim,

$$
\begin{aligned}
Pr(z_i \text{ ser comparado com } z_j) & \\
&= \text{Pr}(z_i \text{ ou } z_j \text{ é escolhido como pivô primeiro em } Z_{ij}) \\
&= \text{Pr}(z_i \text{ é escolhido como pivô primeiro em } Z_{ij}) + \\
&\quad \text{Pr}(z_j \text{ é escolhido como pivô primeiro em } Z_{ij}) \\
&= \frac{1}{j-i+1} + \frac{1}{j-i+1} \\
&= \frac{2}{j-i+1}
\end{aligned}
$$

Substituindo na equação para $E[X]$,

$$\mathbf{E}[\mathbf{X}]$$

Substituindo na equação para $E[X]$,

$$\mathbf{E[X]} = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} E[X_{ij}]$$

Substituindo na equação para $E[X]$,

$$\begin{aligned}\mathbf{E[X]} &= \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} E[X_{ij}] \\ &= \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} \frac{2}{j-i+1}\end{aligned}$$

Substituindo na equação para $E[X]$,

$$\begin{aligned}
\mathbf{E[X]} &= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} E[X_{ij}] \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \frac{2}{j-i+1} \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-i} \frac{2}{k+1}
\end{aligned}$$

Substituindo na equação para $E[X]$,

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E[X]} &= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} E[X_{ij}] \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \frac{2}{j-i+1} \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-i} \frac{2}{k+1} \\
&< \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k}
\end{aligned}
$$

Substituindo na equação para $E[X]$,

$$\begin{aligned}
\mathbf{E[X]} &= \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} E[X_{ij}] \\
&= \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} \frac{2}{j-i+1} \\
&= \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{n-i} \frac{2}{k+1} \\
&< \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k} \\
&= \text{(num. harmônico, eq. A7 do CLRS)} \sum_{i=1}^{n-1} O(\lg n)
\end{aligned}$$