REVISÃO: SOMATÓRIOS E LOGARÍTMOS

Prof. André Vignatti

SOMATÓRIOS

$f : A \to \mathbb{R}$

X**:** subconjunto de A

a, b**:** inteiros

Notação

$$\sum_{x \in X} f(x)$$

denota a soma dos valores de $f(x)$ *para cada* $x \in X$.

$$\textit{Se } X = \emptyset, \textit{ então}$$

$$\sum_{x \in X} f(x) = 0$$

Notação

$$\sum_{i=a}^{b} f(i) := \sum_{x \in \{a, a+1, \ldots, b\}} f(x)$$

Teorema. *Dados um conjunto* X *e* $c \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{x \in X} c = c|X|.$$

Teorema. *Dados* $f, g \colon A \to \mathbb{R}$ *e* $X \subseteq A$,

$$\sum_{x \in X} (f(x) + g(x)) = \sum_{x \in X} f(x) + \sum_{x \in X} g(x).$$

Teorema. *Dada* $f\colon A \to \mathbb{R}$, $X \subseteq A$ *e* $c \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{x \in X} c f(x) = c \sum_{x \in X} f(x).$$

Teorema. *Dada* $f\colon A \to \mathbb{R}$, $X \subseteq A$ *e* $c \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{x \in X} cf(x) = c \sum_{x \in X} f(x).$$

Exemplo. *Qual o valor do somatório* $\sum_{j=1}^{5} j^2$*?*

Teorema. *Dada* $f\colon A \to \mathbb{R}$, $X \subseteq A$ *e* $c \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{x \in X} cf(x) = c \sum_{x \in X} f(x).$$

Exemplo. *Qual o valor do somatório* $\sum_{j=1}^{5} j^2$*?*

$$\sum_{j=1}^{5} j^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55$$

Teorema. *Dada* $f\colon A \to \mathbb{R}$, $X \subseteq A$ *e* $c \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{x \in X} cf(x) = c \sum_{x \in X} f(x).$$

Exemplo. *Qual o valor do somatório* $\sum_{j=1}^{5} j^2$*?*

$$\textstyle\sum_{j=1}^{5} j^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55$$

Exemplo. *Qual o valor do somatório* $\sum_{k=4}^{8} (-1)^k$*?*

Às vezes é útil deslocar o índice do somatório

Isso é geralmente feito para juntar dois somatórios cujos os índices não batem

Às vezes é útil deslocar o índice do somatório

Isso é geralmente feito para juntar dois somatórios cujos os índices não batem

Exemplo. *Suponha o somatório* $\sum_{j=1}^{5} j^2$*. Queremos deslocar o índice, começando de* 0 *até* 4*. Para isso, fazemos* $k = j - 1$*. Então o termo* j^2 *vira* $(k+1)^2$*. Assim,*

Às vezes é útil deslocar o índice do somatório

Isso é geralmente feito para juntar dois somatórios cujos os índices não batem

Exemplo. *Suponha o somatório* $\sum_{j=1}^{5} j^2$. *Queremos deslocar o índice, começando de* 0 *até* 4. *Para isso, fazemos* $k = j - 1$. *Então o termo* j^2 *vira* $(k+1)^2$. *Assim,*

$$\sum_{j=1}^{5} j^2 = \sum_{k=0}^{4} (k+1)^2$$

Às vezes é útil deslocar o índice do somatório

Isso é geralmente feito para juntar dois somatórios cujos os índices não batem

Exemplo. *Suponha o somatório* $\sum_{j=1}^{5} j^2$. *Queremos deslocar o índice, começando de* 0 *até* 4. *Para isso, fazemos* $k = j - 1$. *Então o termo* j^2 *vira* $(k+1)^2$. *Assim,*

$$\sum_{j=1}^{5} j^2 = \sum_{k=0}^{4} (k+1)^2$$

É fácil verificar que ambos são iguais a 55.

Exemplo. *Somatórios duplos aparecem em diversos contextos, por exemplo, em análise de algoritmos com laços aninhados. Um exemplo é:*

$$\sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{3} ij$$

Exemplo. *Somatórios duplos aparecem em diversos contextos, por exemplo, em análise de algoritmos com laços aninhados. Um exemplo é:*

$$\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{3} ij \;= \sum_{i=1}^{4}(i + 2i + 3i)$$

Exemplo. *Somatórios duplos aparecem em diversos contextos, por exemplo, em análise de algoritmos com laços aninhados. Um exemplo é:*

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{3} ij &= \sum_{i=1}^{4}(i + 2i + 3i) \\
&= \sum_{i=1}^{4} 6i
\end{aligned}$$

Exemplo. *Somatórios duplos aparecem em diversos contextos, por exemplo, em análise de algoritmos com laços aninhados. Um exemplo é:*

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{3} ij &= \sum_{i=1}^{4}(i + 2i + 3i) \\
&= \sum_{i=1}^{4} 6i \\
&= 6\sum_{i=1}^{4} i
\end{aligned}$$

Exemplo. *Somatórios duplos aparecem em diversos contextos, por exemplo, em análise de algoritmos com laços aninhados. Um exemplo é:*

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{3} ij &= \sum_{i=1}^{4}(i + 2i + 3i) \\
&= \sum_{i=1}^{4} 6i \\
&= 6\sum_{i=1}^{4} i \\
&= 6(1 + 2 + 3 + 4) = 60.
\end{aligned}
$$

Teorema. $\sum_{i=1}^{n} i = n(n+1)/2.$

Carl Friedrich Gauss
(1777 - 1855)

Teorema. $\sum_{i=1}^{n} i = n(n+1)/2.$

Carl Friedrich Gauss
(1777 - 1855)

Demonstração. Seja

$$S = 1 + \quad 2 \quad\quad + \ldots + n$$
$$S = n + (n-1) + \ldots + 1$$

Teorema. $\sum_{i=1}^{n} i = n(n+1)/2.$

Carl Friedrich Gauss
(1777 - 1855)

Demonstração. Seja

$$S = 1 + \quad 2 \quad + \ldots + n$$
$$S = n + (n-1) + \ldots + 1$$

Somando termo a termo,

$$2S = (n+1) + (n+1) + \ldots + (n+1) = n(n+1)$$

Teorema. $\sum_{i=1}^{n} i = n(n+1)/2.$

Carl Friedrich Gauss
(1777 - 1855)

Demonstração. Seja

$$
\begin{aligned}
S &= 1 + 2 + \ldots + n \\
S &= n + (n-1) + \ldots + 1
\end{aligned}
$$

Somando termo a termo,

$$2S = (n+1) + (n+1) + \ldots + (n+1) = n(n+1)$$

Isolando S, o resultado segue. $\blacksquare$

Exemplo. *Qual o valor de* $\sum_{i=1}^{100} 7i$*?*

Exemplo. *Qual o valor de* $\sum_{i=1}^{100} 7i$ *?*

$$\sum_{i=1}^{100} 7i = 7 \sum_{i=1}^{100} i = 7 \frac{(100)(101)}{2} = 35350.$$

Exemplo. *Qual o valor de* $\sum_{i=50}^{100} 11i$*?*

Exemplo. *Qual o valor de* $\sum_{i=50}^{100} 11i$*?*

Note que $\sum_{i=1}^{100} 11i = \sum_{i=1}^{49} 11i + \sum_{i=50}^{100} 11i$*. Assim,*

Exemplo. *Qual o valor de* $\sum_{i=50}^{100} 11i$*?*

Note que $\sum_{i=1}^{100} 11i = \sum_{i=1}^{49} 11i + \sum_{i=50}^{100} 11i$. *Assim,*

$$\sum_{i=50}^{100} 11i = \sum_{i=1}^{100} 11i - \sum_{i=1}^{49} 11i$$

Exemplo. *Qual o valor de* $\sum_{i=50}^{100} 11i$*?*

Note que $\sum_{i=1}^{100} 11i = \sum_{i=1}^{49} 11i + \sum_{i=50}^{100} 11i$*. Assim,*

$$\begin{aligned} \sum_{i=50}^{100} 11i &= \sum_{i=1}^{100} 11i - \sum_{i=1}^{49} 11i \\ &= 11 \sum_{i=1}^{100} i - 11 \sum_{i=1}^{49} i \end{aligned}$$

Exemplo. *Qual o valor de* $\sum_{i=50}^{100} 11i$*?*

Note que $\sum_{i=1}^{100} 11i = \sum_{i=1}^{49} 11i + \sum_{i=50}^{100} 11i$*. Assim,*

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=50}^{100} 11i &= \sum_{i=1}^{100} 11i - \sum_{i=1}^{49} 11i \\
&= 11 \sum_{i=1}^{100} i - 11 \sum_{i=1}^{49} i \\
&= 11 \left(\sum_{i=1}^{100} i - \sum_{i=1}^{49} i \right)
\end{aligned}
$$

Exemplo. *Qual o valor de* $\sum_{i=50}^{100} 11i$*?*

Note que $\sum_{i=1}^{100} 11i = \sum_{i=1}^{49} 11i + \sum_{i=50}^{100} 11i$*. Assim,*

$$\begin{aligned}
\sum_{i=50}^{100} 11i &= \sum_{i=1}^{100} 11i - \sum_{i=1}^{49} 11i \\
&= 11\sum_{i=1}^{100} i - 11\sum_{i=1}^{49} i \\
&= 11\left(\sum_{i=1}^{100} i - \sum_{i=1}^{49} i\right) \\
&= 11\left(\frac{100 \cdot 101}{2} - \frac{49 \cdot 50}{2}\right)
\end{aligned}$$

Exemplo. *Qual o valor de* $\sum_{i=50}^{100} 11i$*?*

Note que $\sum_{i=1}^{100} 11i = \sum_{i=1}^{49} 11i + \sum_{i=50}^{100} 11i$*. Assim,*

$$\begin{aligned}
\sum_{i=50}^{100} 11i &= \sum_{i=1}^{100} 11i - \sum_{i=1}^{49} 11i \\
&= 11\sum_{i=1}^{100} i - 11\sum_{i=1}^{49} i \\
&= 11\left(\sum_{i=1}^{100} i - \sum_{i=1}^{49} i\right) \\
&= 11\left(\frac{100\cdot 101}{2} - \frac{49\cdot 50}{2}\right) \\
&= 11(5050 - 1225) = 42075.
\end{aligned}$$

LOGARITMOS

$\boxed{\textbf{Definição. } \log_b x \text{ \textit{é o número} } y \text{ \textit{tal que} } b^y = x.}$

Exemplo. $\log_3 81 = 4$ *pois* $3^4 = 81$

Propriedades (independem do valor da base):

- $b^{log_b a} = a$
- $\log ab = \log a + \log b$
- $\log a/b = \log a - \log b$
- $\log a^b = b \log a$
- $\log \sqrt[b]{a} = (1/b) \log a$

(Mudança de base) $\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$.

Em computação, quando o logaritmo é escrito sem base, por convenção, significa que é base 2.