REVISÃO: DEMONSTRAÇÃO POR INDUÇÃO

Prof. André Vignatti

$\boxed{\text{Como ter certeza que uma afirmação é verdadeira?}}$

$\boxed{\text{Como ter certeza que uma afirmação é verdadeira?}}$

- deve-se provar (ou demonstrar) a afirmação

$\boxed{\text{Como ter certeza que uma afirmação é verdadeira?}}$

- deve-se provar (ou demonstrar) a afirmação

$\boxed{\text{O que é uma prova?}}$

Historicamente, há duas noções distintas de prova:

Historicamente, há duas noções distintas de prova:

1. algo que induz no público uma sensação intuitiva de certeza de que o resultado está correto

Historicamente, há duas noções distintas de prova:

1. algo que induz no público uma sensação intuitiva de certeza de que o resultado está correto

- "é uma experiência transformadora interna - uma maneira de sua alma fazer contato com as verdades eternas do céu platônico".

Historicamente, há duas noções distintas de prova:

1. algo que induz no público uma sensação intuitiva de certeza de que o resultado está correto

- "é uma experiência transformadora interna - uma maneira de sua alma fazer contato com as verdades eternas do céu platônico".

2. uma sequência de símbolos obedecendo a certas regras - uma prova é uma computação.

Historicamente, há duas noções distintas de prova:

1. algo que induz no público uma sensação intuitiva de certeza de que o resultado está correto

- "é uma experiência transformadora interna - uma maneira de sua alma fazer contato com as verdades eternas do céu platônico".

2. uma sequência de símbolos obedecendo a certas regras - uma prova é uma computação.

- Se a prova é puramente mecânica, então, em princípio, você pode descobrir novas verdades matemáticas apenas girando uma manivela.

COMO PROVAR TEOREMAS?

- não há receita de bolo

COMO PROVAR TEOREMAS?

- não há receita de bolo

- mas há técnicas que podem servir:

  - demonstração direta
  - demonstração por contrapositiva
  - demonstração por contradição
  - demonstração por casos
  - demonstração por indução

PROVA POR INDUÇÃO

Ideia ingênua: testar vários exemplos, e dizer que isso “prova” a afirmação.

Elaborando mais essa ideia, chega-se no conceito de prova por indução.

$\boxed{\textbf{Teorema. } P(n) : \sum_{i=1}^{n} = n(n+1)/2.}$

$\boxed{\textbf{Teorema. } P(n) : \sum_{i=1}^{n} = n(n+1)/2.}$

- Para $n = 1$,

$\boxed{\textbf{Teorema. } P(n) : \sum_{i=1}^{n} = n(n+1)/2.}$

- Para $n = 1$,
  - **[lado esquerdo]** 1.

$\boxed{\textbf{Teorema. } P(n) : \sum_{i=1}^{n} = n(n+1)/2.}$

- Para $n = 1$,
  - **[lado esquerdo]** 1.
  - **[lado direito]** $\frac{1(2)}{2} = 1$.

$\boxed{\textbf{Teorema. } P(n) : \sum_{i=1}^{n} = n(n+1)/2.}$

- Para $n = 1$,
  - **[lado esquerdo]** 1.
  - **[lado direito]** $\frac{1(2)}{2} = 1$.
- Para $n = 2$,

$\boxed{\textbf{Teorema. } P(n) : \sum_{i=1}^{n} = n(n+1)/2.}$

- Para $n = 1$,
  - **[lado esquerdo]** 1.
  - **[lado direito]** $\frac{1(2)}{2} = 1$.
- Para $n = 2$,
  - **[lado esquerdo]** usando $P(1) : \sum_{i=1}^{1} = \frac{1(2)}{2}$ (já provado),

Teorema. $P(n) : \sum_{i=1}^{n} = n(n+1)/2.$

- Para $n = 1$,
  - **[lado esquerdo]** 1.
  - **[lado direito]** $\frac{1(2)}{2} = 1$.
- Para $n = 2$,
  - **[lado esquerdo]** usando $P(1) : \sum_{i=1}^{1} = \frac{1(2)}{2}$ (já provado),

$$\sum_{i=1}^{2} i = \sum_{i=1}^{1} i + 2 = \frac{1(2)}{2} + 2 = 3$$

$$\boxed{\textbf{Teorema. } P(n) : \textstyle\sum_{i=1}^{n} = n(n+1)/2.}$$

- Para $n = 1$,
  - **[lado esquerdo]** 1.
  - **[lado direito]** $\frac{1(2)}{2} = 1$.
- Para $n = 2$,
  - **[lado esquerdo]** usando $P(1) : \sum_{i=1}^{1} = \frac{1(2)}{2}$ (já provado),

$$\sum_{i=1}^{2} i = \sum_{i=1}^{1} i + 2 = \frac{1(2)}{2} + 2 = 3$$

  - **[lado direito]** $\frac{2(3)}{2} = 3$

- Para $n = 3$,

- Para $n = 3$,
  - [**lado esquerdo**] usando $P(2) : \sum_{i=1}^{2} = \frac{2(3)}{2}$ (já provado),

- Para $n = 3$,
  - [**lado esquerdo**] usando $P(2) : \sum_{i=1}^{2} = \frac{2(3)}{2}$ (já provado),

$$\sum_{i=1}^{3} i = \sum_{i=1}^{2} i + 3 = \frac{2(3)}{2} + 3 = \frac{2(3) + 2(3)}{2} = 6$$

- Para $n = 3$,
  - **[lado esquerdo]** usando $P(2) : \sum_{i=1}^{2} = \frac{2(3)}{2}$ (já provado),

$$\sum_{i=1}^{3} i = \sum_{i=1}^{2} i + 3 = \frac{2(3)}{2} + 3 = \frac{2(3) + 2(3)}{2} = 6$$

  - **[lado direito]** $\frac{3(4)}{2} = 6$

- Para $n = 3$,
  - **[lado esquerdo]** usando $P(2) : \sum_{i=1}^{2} = \frac{2(3)}{2}$ (já provado),

$$\sum_{i=1}^{3} i = \sum_{i=1}^{2} i + 3 = \frac{2(3)}{2} + 3 = \frac{2(3) + 2(3)}{2} = 6$$

  - **[lado direito]** $\frac{3(4)}{2} = 6$
- Podemos usar a mesma ideia para $n = 4, 5, \ldots$

Com exceção de $P(1)$, o resto do raciocínio é repetitivo.

Com exceção de $P(1)$, o resto do raciocínio é repetitivo.

Podemos descrever isso com um algoritmo:

Algoritmo 1: Algoritmo para provar uma afirmação

faça um prova para $P(1)$
for $k \leftarrow 2$ **to** n **do**
    use as provas de $P(1), P(2) \ldots, P(k-1)$ como verdades
    com essa **hipótese**, prove $P(k)$
end

Algoritmo 1: Algoritmo para provar uma afirmação

faça um prova para $P(1)$

for $k \leftarrow 2$ **to** n **do**

  use as provas de $P(1), P(2) \ldots, P(k-1)$ como verdades

  com essa **hipótese**, prove $P(k)$

end

Para preencher esse algoritmo, precisamos:

Algoritmo 1: Algoritmo para provar uma afirmação

faça um prova para $P(1)$

for $k \leftarrow 2$ **to** n **do**

  use as provas de $P(1), P(2) \ldots, P(k-1)$ como verdades

  com essa **hipótese**, prove $P(k)$

end

Para preencher esse algoritmo, precisamos:

- **Base**: fazer a prova para $P(1)$

Algoritmo 1: Algoritmo para provar uma afirmação

$\boxed{\text{faça um prova para } P(1)}$

for $k \leftarrow 2$ **to** n **do**

  $\boxed{\text{use as provas de } P(1), P(2) \ldots, P(k-1) \text{ como verdades}}$

  com essa **hipótese**, prove $P(k)$

end

Para preencher esse algoritmo, precisamos:

- $\boxed{\textbf{Base}\text{: fazer a prova para } P(1)}$

- $\boxed{\textbf{Hipótese}\text{: supor que } P(1), P(2) \ldots, P(k-1) \text{ já foram provados}}$

Algoritmo 1: Algoritmo para provar uma afirmação

```
faça um prova para P(1)
for k ← 2 to n do
    use as provas de P(1), P(2) ..., P(k − 1) como verdades
    com essa hipótese, prove P(k)
end
```

Para preencher esse algoritmo, precisamos:

- **Base**: fazer a prova para $P(1)$

- **Hipótese**: supor que $P(1), P(2) \ldots, P(k-1)$ já foram provados

- **Passo**: usando a hipótese, provar $P(k)$

Para o exemplo, falta formalizar a escrita da hipótese, e fazer o passo:

Para o exemplo, falta formalizar a escrita da hipótese, e fazer o passo:

- hipótese: $P(k-1) : \sum_{i=1}^{k-1} = \frac{(k-1)(k)}{2}$ é verdade

Para o exemplo, falta formalizar a escrita da hipótese, e fazer o passo:

- hipótese: $P(k-1) : \sum_{i=1}^{k-1} = \frac{(k-1)(k)}{2}$ é verdade

- passo: vamos provar $P(k)$

$$\sum_{i=1}^{k} i = \sum_{i=1}^{k-1} i + k = \frac{(k-1)(k)}{2} + k = \frac{(k-1)(k) + 2(k)}{2} = \frac{k(k+1)}{2}.$$

ANÁLISE DO ALGORITMO DE INDUÇÃO

Em análise de algoritmos, geralmente analisamos (1) tempo de execução e (2) corretude.

ANÁLISE DO ALGORITMO DE INDUÇÃO

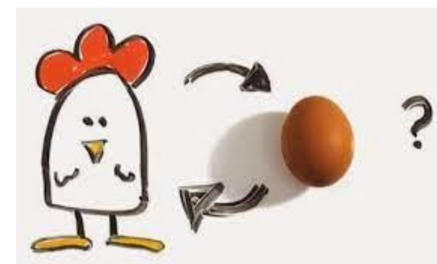
Em análise de algoritmos, geralmente analisamos (1) tempo de execução e (2) corretude.

- Para o algoritmo de indução, só importa a corretude.

ANÁLISE DO ALGORITMO DE INDUÇÃO

Em análise de algoritmos, geralmente analisamos (1) tempo de execução e (2) corretude.

- Para o algoritmo de indução, só importa a corretude.

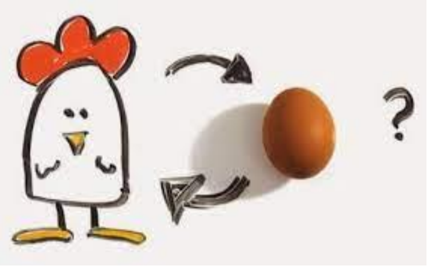


- Para provar a corretude de algoritmos, usa-se prova por indução

ANÁLISE DO ALGORITMO DE INDUÇÃO

Em análise de algoritmos, geralmente analisamos (1) tempo de execução e (2) corretude.

- Para o algoritmo de indução, só importa a corretude.



- Para provar a corretude de algoritmos, usa-se prova por indução

Solução: assumir que a corretude da indução é um **axioma**.

EXEMPLOS

$\boxed{\textbf{Teorema.}\ n < 2^n, \forall n \in N.}$

EXEMPLOS

$$\boxed{\textbf{Teorema. } n < 2^n, \forall n \in N.}$$

Demonstração.

base da indução : Seja $k = 0$, então $0 < 1 = 2^0$. Logo $p(0)$ é verdadeiro

EXEMPLOS

$\boxed{\textbf{Teorema. } n < 2^n, \forall n \in N.}$

Demonstração.

base da indução : Seja $k = 0$, então $0 < 1 = 2^0$. Logo $p(0)$ é verdadeiro

hipótese da indução : Assumir que $p(k) : k < 2^k$ é verdadeiro

EXEMPLOS

$$\boxed{\textbf{Teorema. } n < 2^n, \forall n \in N.}$$

Demonstração.

base da indução : Seja $k = 0$, então $0 < 1 = 2^0$. Logo $p(0)$ é verdadeiro

hipótese da indução : Assumir que $p(k) : k < 2^k$ é verdadeiro

passo da indução : Mostrar que $p(k) \Rightarrow p(k+1)$

EXEMPLOS

$$\boxed{\textbf{Teorema. } n < 2^n, \forall n \in N.}$$

Demonstração.

base da indução : Seja $k = 0$, então $0 < 1 = 2^0$. Logo $p(0)$ é verdadeiro

hipótese da indução : Assumir que $p(k) : k < 2^k$ é verdadeiro

passo da indução : Mostrar que $p(k) \Rightarrow p(k+1)$

$$k + 1 < (hip.) 2^k + 1 \leq 2^k + 2^k = 2 * 2^k = 2^{k+1}.$$

$\blacksquare$

Teorema. $\boxed{2^n < n!, \forall n \in N, n > 3.}$

$\boxed{\textbf{Teorema. } 2^n < n!, \forall n \in N, n > 3.}$

Demonstração.

base da indução : Seja $k = 4$. Então $2^4 = 16 < 24 = 4!$

$$\boxed{\textbf{Teorema. } 2^n < n!, \forall n \in N, n > 3.}$$

Demonstração.

base da indução : Seja $k = 4$. Então $2^4 = 16 < 24 = 4!$

hipótese da indução : Assumir que $p(k) : 2^k < k!, k > 3$ é verdadeiro

$\boxed{\textbf{Teorema. } 2^n < n!, \forall n \in N, n > 3.}$

Demonstração.

base da indução : Seja $k = 4$. Então $2^4 = 16 < 24 = 4!$

hipótese da indução : Assumir que $p(k) : 2^k < k!, k > 3$ é verdadeiro

passo da indução :

$$2^{k+1} = 2 \cdot 2^k < (hip) 2 \cdot k! < (k+1)k! < (k+1)!$$

$\blacksquare$

$\boxed{\textbf{Teorema. } n^2 \leq n!, \textit{ para todo } n \in \mathbb{N}, n \geq 4}$

$\boxed{\textbf{Teorema. } n^2 \leq n!, \textit{ para todo } n \in \mathbb{N}, n \geq 4}$

Demonstração.

base da indução : Para $n = 4$, temos $4^2 \leq 4!$, pois $16 \leq 24$

$\boxed{\textbf{Teorema. } n^2 \leq n!, \textit{ para todo } n \in \mathbb{N}, n \geq 4}$

Demonstração.

base da indução : Para $n = 4$, temos $4^2 \leq 4!$, pois $16 \leq 24$

hipótese da indução : $q^2 \leq q!$ é verdade, para todo $4 \leq q \leq k - 1$

$\boxed{\textbf{Teorema. } n^2 \leq n!, \textit{ para todo } n \in \mathbb{N}, n \geq 4}$

Demonstração.

base da indução : Para $n = 4$, temos $4^2 \leq 4!$, pois $16 \leq 24$

hipótese da indução : $q^2 \leq q!$ é verdade, para todo $4 \leq q \leq k - 1$

passo da indução : Queremos provar que $k^2 \leq k!$

$\boxed{\textbf{Teorema. } n^2 \leq n!, \textit{ para todo } n \in \mathbb{N}, n \geq 4}$

Demonstração.

base da indução : Para $n = 4$, temos $4^2 \leq 4!$, pois $16 \leq 24$

hipótese da indução : $q^2 \leq q!$ é verdade, para todo $4 \leq q \leq k-1$

passo da indução : Queremos provar que $k^2 \leq k!$

Mas isso é mesma coisa que provar que $(k-1+1)^2 \leq k!$

$\boxed{\textbf{Teorema. } n^2 \leq n!, \textit{ para todo } n \in \mathbb{N}, n \geq 4}$

Demonstração.

base da indução : Para $n = 4$, temos $4^2 \leq 4!$, pois $16 \leq 24$

hipótese da indução : $q^2 \leq q!$ é verdade, para todo $4 \leq q \leq k - 1$

passo da indução : Queremos provar que $k^2 \leq k!$

Mas isso é mesma coisa que provar que $(k - 1 + 1)^2 \leq k!$

Mas isso é mesma coisa que provar que $(k - 1)^2 + 2(k - 1) + 1 \leq k!$

Assim:

$$(k-1)^2 + 2(k-1) + 1 \overset{\text{(hipótese)}}{\leq} (k-1)! + 2(k-1) + 1$$

Assim:

$$
\begin{aligned}
(k-1)^2 + 2(k-1) + 1 &\overset{\text{(hipótese)}}{\leq} (k-1)! + 2(k-1) + 1 \\
&\overset{\text{(pois } k \geq 4)}{\leq} (k-1)! + 2(k-1) + (k-1)
\end{aligned}
$$

Assim:

$$
\begin{aligned}
(k-1)^2 + 2(k-1) + 1 &\overset{\text{(hipótese)}}{\leq} (k-1)! + 2(k-1) + 1 \\
&\overset{\text{(pois } k \geq 4)}{\leq} (k-1)! + 2(k-1) + (k-1) \\
&= (k-1)! + 3(k-1)
\end{aligned}
$$

Assim:

$$
\begin{aligned}
(k-1)^2 + 2(k-1) + 1 &\overset{\text{(hipótese)}}{\leq} (k-1)! + 2(k-1) + 1 \\
&\overset{\text{(pois } k \geq 4)}{\leq} (k-1)! + 2(k-1) + (k-1) \\
&= (k-1)! + 3(k-1) \\
&\leq (k-1)! + 3(k-1)!
\end{aligned}
$$

Assim:

$$
\begin{aligned}
(k-1)^2 + 2(k-1) + 1 &\overset{\text{(hipótese)}}{\leq} (k-1)! + 2(k-1) + 1 \\
&\overset{\text{(pois } k \geq 4)}{\leq} (k-1)! + 2(k-1) + (k-1) \\
&= (k-1)! + 3(k-1) \\
&\leq (k-1)! + 3(k-1)! \\
&= 4(k-1)!
\end{aligned}
$$

Assim:

$$
\begin{aligned}
(k-1)^2 + 2(k-1) + 1 &\overset{\text{(hipótese)}}{\leq} (k-1)! + 2(k-1) + 1 \\
&\overset{(\text{pois } k \geq 4)}{\leq} (k-1)! + 2(k-1) + (k-1) \\
&= (k-1)! + 3(k-1) \\
&\leq (k-1)! + 3(k-1)! \\
&= 4(k-1)! \\
&\overset{(\text{pois } k \geq 4)}{\leq} k(k-1)!
\end{aligned}
$$

Assim:

$$
\begin{aligned}
(k-1)^2+2(k-1)+1 &\overset{\text{(hipótese)}}{\leq} (k-1)!+2(k-1)+1 \\
&\overset{\text{(pois } k\geq 4)}{\leq} (k-1)!+2(k-1)+(k-1) \\
&= (k-1)!+3(k-1) \\
&\leq (k-1)!+3(k-1)! \\
&= 4(k-1)! \\
&\overset{\text{(pois } k\geq 4)}{\leq} k(k-1)! \\
&= k!
\end{aligned}
$$

$\blacksquare$