Aula 5 · Busca Binária, Divisão e Conquista e Árvores de Fenwick e de Segmentos

Desafios de Programação

Fernando Kiotheka Victor Alflen

UFPR

06/07/2022

Busca Binária

Esse tal de lg parece bom!

- Os logaritmos aparecem toda hora nos algoritmos.
- Geralmente isso advém de resolver problemas por meio da divisão em subproblemas menores.
- O número de vezes que a gente pode dividir um problema sucessivamente por dois é dado por $\log_2$ ou lg.
- Se a gente dividir por três acabamos com $\log_3$, mas também podemos fazer operações no caminho dessa recursão, acabando com complexidades mais complicadas. Isso é tópico da disciplina de Análise de Algoritmos.
- Já vimos algoritmos e estruturas logarítmicas: A exponenciação binária, e as árvores rubro-negras (`set` e `map`) têm essa complexidade embutida no seu funcionamento.
- O algoritmo que mais encapsula esse comportamento em sua essência é a *busca binária*.

A busca binária

Em Algoritmos I devem te contar a historinha de como você acharia uma palavra no dicionário. Como o dicionário está ordenado, um jeito bem eficiente é abrir o meio, verificar se o que você está procurando está antes ou depois, e ir dividindo o que resta ao meio até encontrar a palavra que você quer. Isso é eficiente, pois é logarítmico, e lg é uma operação eficiente:

n	$\lg n$	n	$\lg n$	n	$\lg n$
10^0	0,000	10^{10}	33,219	10^{20}	66,438
10^1	3,321	10^{11}	36,541	10^{21}	69,760
10^2	6,643	10^{12}	39,863	10^{22}	73,082
10^3	9,965	10^{13}	43,185	10^{23}	76,404
10^4	13,287	10^{14}	46,506	10^{24}	79,726
10^5	16,609	10^{15}	49,828	10^{25}	83,048
10^6	19,931	10^{16}	53,150	10^{26}	86,370
10^7	23,253	10^{17}	56,472	10^{27}	89,692
10^8	26,575	10^{18}	59,794	10^{28}	93,013
10^9	29,897	10^{19}	63,116	10^{29}	96,335

O que precisa pra fazer busca binária?

- É preciso estabelecer um **predicado** de busca.
- Ele particiona o espaço de busca em duas regiões contíguas.

Por exemplo, $P(i) = E_n[i] \leq 2$ particiona um espaço ordenado

$$E_n = \left[{}_0 1 \, {}_1 2 \, {}_2 3 \, {}_3 4 \, {}_4 5 \, {}_5 6 \, {}_6 7 \, {}_7 \right]$$

em duas regiões, compostas por valores de verdadeiro ou falso:

$$E_b = \left[{}_0 \mathtt{T} \, {}_1 \mathtt{T} \, {}_2 \mathtt{F} \, {}_3 \mathtt{F} \, {}_4 \mathtt{F} \, {}_5 \mathtt{F} \, {}_6 \mathtt{F} \, {}_7 \right]$$

Quando você consegue fazer isso, a busca binária vai te permitir achar exatamente a posição onde o espaço de busca é particionado em $\lg n$ (sendo n o tamanho do espaço de busca).

Note o espaço!

- Nem todo espaço de busca é adequado.
- O algoritmo tem que saber **pra onde ir** em toda iteração.

Por exemplo, imagine que a gente tem uma sequência de bits da seguinte forma: $0^*1^*0^*$. É possível encontrar o primeiro bit 1 usando busca binária? De forma geral, não.

- Se encontrarmos um 1 por acidente, sabemos para onde ir! (para a esquerda)
- Porém, se sempre encontrarmos um 0, não sabemos para que lado ir, pois a sequência de 1s pode estar à direita ou à esquerda.

Assim, no pior caso, achar o primeiro bit 1 nessa sequência é $\mathcal{O}(n)$. A busca binária não nos ajuda a melhorar essa complexidade. Esse problema se resume ao problema de achar a posição de um valor em um vetor ordenado deslocado com elementos duplicados.

Mas no que eu posso aplicar, então?

- Posição à esquerda ou à direita de valor em vetor ordenado.
- Contagem de ocorrências de valor em vetor ordenado.
- Posição de valor em vetor ordenado deslocado sem duplicados.
- Posição de máximo/mínimo de função unimodal.
- Raiz quadrada de um número (método de bisecção).
- i-ésimo elemento de união de vetores ordenados.
- Elemento em vetor ordenado que é igual ao seu índice.
- Muito mais, inclusive envolvendo números em ponto flutuante.

Achando posição depois do valor em vetor ordenado

Código upperboundmanual.cpp

```
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
int main() {
    int n; while (cin >> n) {
        vector<int> v (n); for (int& x : v) { cin >> x; }
        int lo = 0, hi = n;
        while (lo < hi) {
            int mi = lo + (hi-lo) / 2; // evite overflow!
            if (v[mi] <= 2) { lo = mi + 1; }
            else { hi = mi; }
        } cout << lo << "\n";
    }
}
```

Entrada	Saída
7 1 2 3 4 5 6 7	2
7 1 2 2 2 3 4 5	4
7 1 1 1 2 2 3 4	5

Achando posição depois do valor em vetor ordenado (STL)

Código upperbound.cpp

```
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
int main() {
    int n; while (cin >> n) {
        vector<int> v (n); for (int& x : v) { cin >> x; }
        auto it = upper_bound(v.begin(), v.end(), 2);
        cout << it - v.begin() << "\n";
    }
}
```

Entrada	Saída
7 1 2 3 4 5 6 7	2
7 1 2 2 2 3 4 5	4
7 1 1 1 2 2 3 4	5

Operações prontas na STL

- `upper_bound(iterator begin, end, T val)`: Acha posição depois do valor em vetor ordenado ($P(i) = v[i] \leq v$).
- `lower_bound(iterator begin, end, T val)`: Acha posição do primeiro valor em vetor ordenado ($P(i) = v[i] < v$).
- `binary_search(iterator begin, end, T val)`: Verifica se o valor está no vetor ordenado (utilizando `lower_bound`).

Usando essas operações é possível calcular a quantidade de números em um vetor ordenado (`upper_bound - lower_bound`).
Qualquer outra coisa: Você vai ter que implementar na mão. Principalmente aquelas que o valor é computado por alguma função, e não tem todos os valores prontinhos em um vetor (pré-calculá-los todos seria $\mathcal{O}(n)$ ou pior).

`lower_bound` nas estruturas da STL

Quando falamos das estruturas da STL, deixamos de fora essas funções, mas todas as estruturas ordenadas, como `map`, `set`, `multiset`, etc tem funções **próprias** de `lower_bound` e `upper_bound`.

- Preste muita atenção que é `s.lower_bound(v)` e não `lower_bound(s.begin(), s.end(), v)`.
- A complexidade do `lower_bound` com iteradores vai se reduzir a $\mathcal{O}(n)$ se os iteradores não suportarem acesso aleatório (o que é o caso para essas estruturas).
- Isso é muito interessante para implementar várias coisas legais com essas estruturas (por exemplo um diagrama de Voronoi).
- Essa técnica pode ser aplicada em qualquer coisa ordenada. É possível por exemplo fazer um `lower_bound` para a Árvore de Fenwick que veremos daqui a pouco.

Quero ler mais sobre!

- Temos um material específico só sobre busca binária: `https://www.inf.ufpr.br/maratona/nlgn/busca-binaria/`.
- Os detalhes do algoritmo estão mais bem explicadinhos e há mais alguns exemplos e diversas implementações que podem ser mais intuitivas.
- Um exemplo é o que vou mostrar a seguir: Passo binário é um jeito de "compactar" a busca binária, e permite que várias buscas binárias possam funcionar simultâneamente (do outro jeito você precisaria de duas buscas, uma seguida da outra).

Implementação alternativa: Passo binário

Código `binarystep.cpp`

```
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
int main() {
    int n; while (cin >> n) {
        vector<int> v (n); for (int& x : v) { cin >> x; }
        int l = n, r = n;
        for (int p = n; p >= 1; p /= 2) {
            while (l-p >= 0 && !(v[l-p] < 2)) { l -= p; }
            while (r-p >= 0 && !(v[r-p] <= 2)) { r -= p; }
        }
        cout << r - l << "\n";
    }
}
```

Entrada	Saída
7 1 2 3 4 5 6 7	1
7 1 2 2 2 3 4 5	3
7 1 1 1 2 2 3 4	2

Divisão e Conquista

Divisão e Conquista

- Algoritmos que implementam os passos:
  - **Dividir**: Quebrar o problema em pedaços.
  - **Conquistar**: Resolver o problema de forma recursiva.
  - **Combinar**: Combinar as subsoluções em uma solução.
- Complexidade pelo Teorema Mestre (Análise de Algoritmos).
- Exemplo prático: Contar inversões usando o Merge Sort.

Contando inversões

Inversões... que?

- Em ciência da computação e em matemática discreta, uma sequência tem uma inversão quando dois de seus elementos estão fora de sua ordem natural.
- Seja A uma sequência. Se $i < j$ e $A[i] > A[j]$, então o par de índices (i, j) ou o par de elementos $(A[i], A[j])$ é chamado de **inversão** de A.

Notação: I_v^0 é um conjunto de inversão de par de índices indexados em 0 do vetor v. I_v é o conjunto de inversão de elementos de v.

$$v_1 = \left[{}_0 4 \, {}_1 2 \, {}_2 1 \, {}_3 3 \, {}_4 \right]$$

$$I_{v_1}^0 = \{(0,1), (0,2), (0,3), (1,2)\}$$

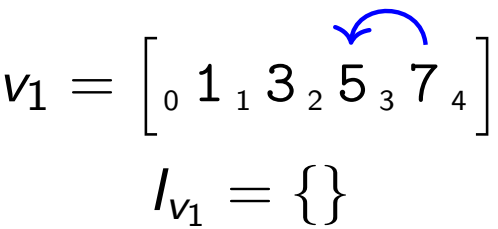
$$I_{v_1} = \{(4,2), (4,1), (4,3), (2,1)\}$$

Exemplo de inversão

$$v_1 = \left[{}_0 1 \, {}_1 3 \, {}_2 5 \, {}_3 7 \, {}_4 \right]$$

$$I_{v_1} = \{\}$$

Exemplo de inversão

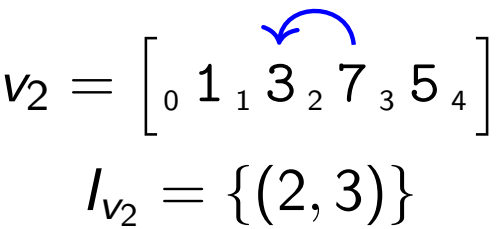


Exemplo de inversão

$$v_2 = \left[{}_0 1 \, {}_1 3 \, {}_2 7 \, {}_3 5 \, {}_4 \right]$$

$$I_{v_2} = \{(2, 3)\}$$

Exemplo de inversão



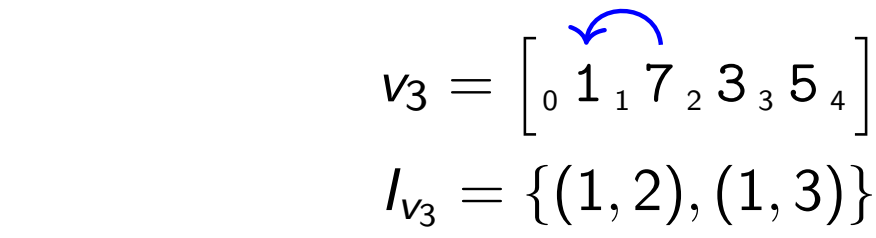
$$I_{v_2} = \{(2, 3)\}$$

Exemplo de inversão

$$v_3 = \left[{}_0 1 \, {}_1 7 \, {}_2 3 \, {}_3 5 \, {}_4 \right]$$

$$I_{v_3} = \{(1,2),(1,3)\}$$

Exemplo de inversão

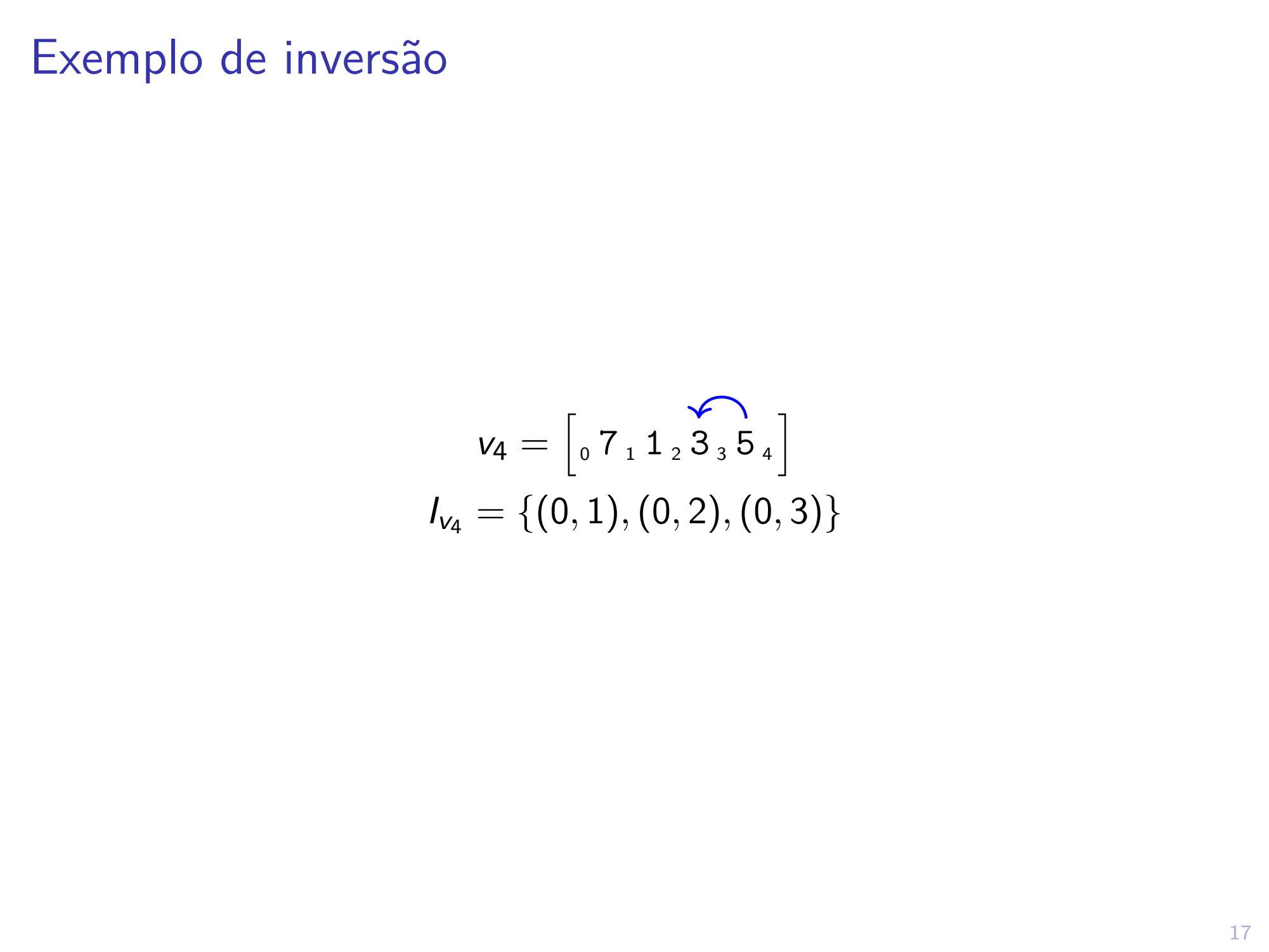


Exemplo de inversão

$$v_4 = \left[{}_0 7 \, {}_1 1 \, {}_2 3 \, {}_3 5 \, {}_4 \right]$$

$$I_{v_4} = \{(0,1),(0,2),(0,3)\}$$

Exemplo de inversão

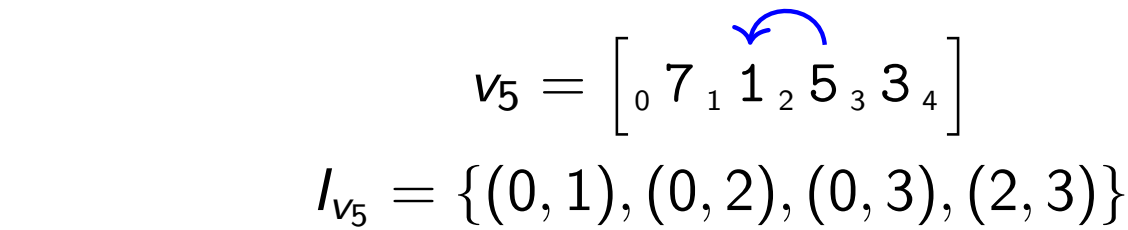


Exemplo de inversão

$$v_5 = \left[{}_0 7 \; {}_1 1 \; {}_2 5 \; {}_3 3 \; {}_4 \right]$$

$$I_{v_5} = \{(0,1),(0,2),(0,3),(2,3)\}$$

Exemplo de inversão



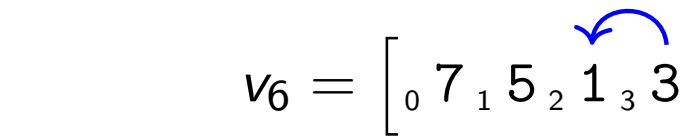
$$I_{v_5} = \{(0,1),(0,2),(0,3),(2,3)\}$$

Exemplo de inversão

$$v_6 = \left[{}_0 7 \, {}_1 5 \, {}_2 1 \, {}_3 3 \, {}_4 \right]$$

$$I_{v_6} = \{(0,1),(0,2),(0,3),(1,2),(1,3)\}$$

Exemplo de inversão



$$I_{v_6} = \{(0,1),(0,2),(0,3),(1,2),(1,3)\}$$

Exemplo de inversão

$$v_7 = \left[{}_0 7 \, {}_1 5 \, {}_2 3 \, {}_3 1 \, {}_4 \right]$$

$$I_{v_7} = \{(0,1),(0,2),(0,3),(1,2),(1,3),(2,3)\}$$

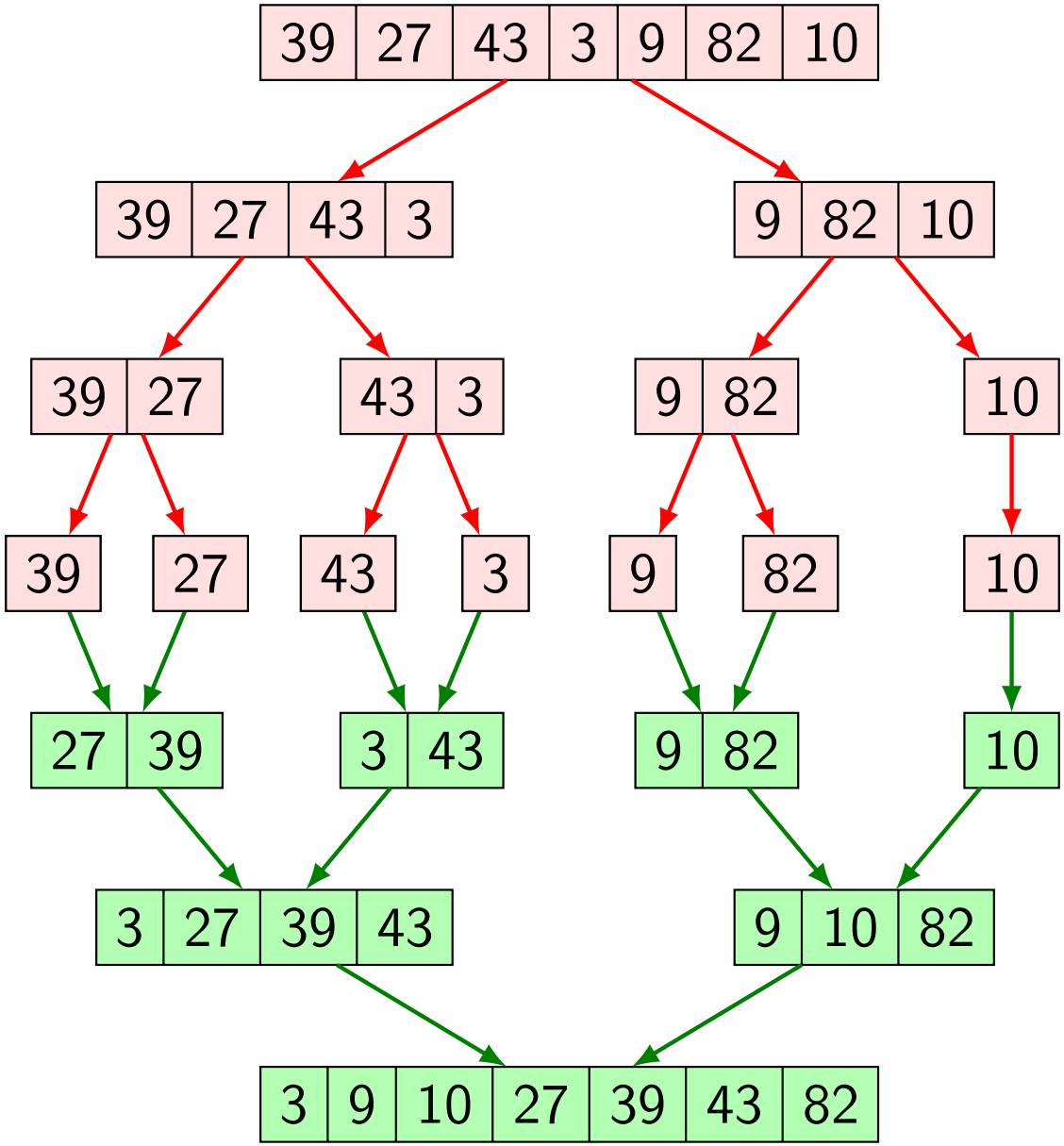
Exemplo de inversão

$$v_7 = \left[{}_0 7 \, {}_1 5 \, {}_2 3 \, {}_3 1 \, {}_4 \right]$$

$$I_{v_7} = \{(0,1),(0,2),(0,3),(1,2),(1,3),(2,3)\}$$

$$|I_{v_7}| = n(n-1)/2 = (4 \cdot 3)/2 = 6$$

Merge Sort


39 27 43 3 9 82 10
39 27 43 3
9 82 10
39 27
43 3
9 82
10
39
27
43
3
9
82
10
27 39
3 43
9 82
10
3 27 39 43
9 10 82
3 9 10 27 39 43 82

Merge Sort

Código `mergesort.h`

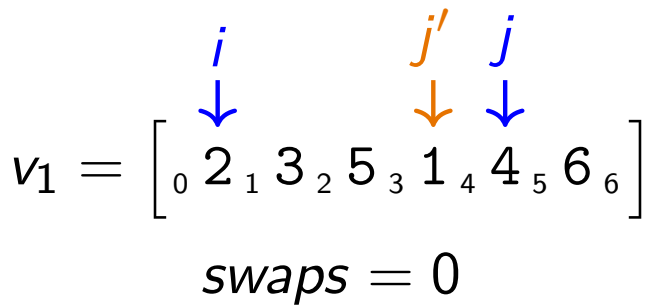
```
int swaps = 0;
void merge_sort(int l, int r) {
    if (r - l == 1) { return; }
    int mi = l + (r - l) / 2;
    merge_sort(l, mi); merge_sort(mi, r);
    vector<int> aux (r - l);
    int i = l, j = mi;
    for (int k = 0; k < r - l; k++) {
        if (i < mi && j < r) {
            if (!(a[i] < a[j])) { swaps += mi - i; }
            if (a[i] < a[j]) { aux[k] = a[i++]; }
            else { aux[k] = a[j++]; }
        } else if (i < mi) { aux[k] = a[i++]; }
        else { aux[k] = a[j++]; }
    }
    copy(aux.begin(), aux.end(), a.begin()+l);
}
```

Fusão

$$v_1 = \begin{bmatrix} \overset{i}{\downarrow} & & \overset{j}{\downarrow} & & & & \\ {}_0 2 & {}_1 3 & {}_2 5 & {}_3 1 & {}_4 4 & {}_5 6 & {}_6 \end{bmatrix}$$

$$swaps = 0$$

Fusão



Fusão

$$v_2 = \begin{array}{c} \overset{i}{\downarrow} \quad \overset{j'}{\downarrow} \quad \overset{j}{\downarrow} \\ \left[{}_0 2 {}_1 3 {}_2 1 {}_3 5 {}_4 4 {}_5 6 {}_6 \right] \end{array}$$

$$swaps = 1$$

Fusão

$$v_3 = \begin{array}{c} \overset{i}{\downarrow} \quad \overset{j'}{\downarrow} \qquad\qquad \overset{j}{\downarrow} \\ \left[{}_0 2 \, {}_1 1 \, {}_2 3 \, {}_3 5 \, {}_4 4 \, {}_5 6 \, {}_6 \right] \end{array}$$

$$swaps = 2$$

Fusão

$$v_4 = \begin{array}{c} \overset{j'}{\downarrow} \quad \overset{i}{\downarrow} \qquad\qquad \overset{j}{\downarrow} \\ \left[{}_0 1 \, {}_1 2 \, {}_2 3 \, {}_3 5 \, {}_4 4 \, {}_5 6 \, {}_6 \right] \end{array}$$

$$swaps = 3$$

Fusão

$$v_4 = \begin{bmatrix} {}_0 1 & {}_1 2 & {}_2 3 & {}_3 5 & {}_4 4 & {}_5 6 & {}_6 \end{bmatrix}$$

(i aponta para 2, j aponta para 4)

$$swaps = 3$$

Fusão

$$v_4 = \begin{array}{c} \overset{i}{\downarrow} \overset{j}{\downarrow} \\ [_0\,1_{\,1}\,2_{\,2}\,3_{\,3}\,5_{\,4}\,4_{\,5}\,6_{\,6}\,] \end{array}$$

$$swaps = 3$$

Fusão

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & i & j & \\ & & & & \downarrow & \downarrow & \end{array}$$

$$v_4 = \left[{}_0\, 1 \,{}_1\, 2 \,{}_2\, 3 \,{}_3\, 5 \,{}_4\, 4 \,{}_5\, 6 \,{}_6 \right]$$

$$swaps = 3$$

Fusão

$$v_4 = \begin{array}{c} \overset{i}{\downarrow}\ \overset{j'}{\downarrow}\ \overset{j}{\downarrow} \\ \left[{}_0 1\ {}_1 2\ {}_2 3\ {}_3 5\ {}_4 4\ {}_5 6\ {}_6 \right] \end{array}$$

$$swaps = 3$$

Fusão

$$v_5 = \begin{array}{c} \overset{j'}{\downarrow} \quad \overset{i}{\downarrow} \quad \overset{j}{\downarrow} \\ \left[{}_0 1 {}_1 2 {}_2 3 {}_3 4 {}_4 5 {}_5 6 {}_6 \right] \end{array}$$

$$swaps = 4$$

Implementação de contar inversões

Código `mergesort.cpp`

```
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
vector<int> a (1e5+15);
#include "mergesort.h"
int main() {
    int n; while (cin >> n) {
        for (int i = 0; i < n; i++)
            cin >> a[i];
        swaps = 0;
        merge_sort(0, n);
        cout << swaps << "\n";
    }
}
```

Entrada	Saída
4 4 2 1 3	4
4 7 5 3 1	6
6 2 3 5 1 4 6	4

Quero saber mais sobre inversões!

Na oficina do Clube de Programação de 9 de março de 2021, falamos mais sobre inversões (`http://cdp.dainf.ct.utfpr.edu.br/history.html#of9mar2021`) e como dá pra resolver com:

- Merge Sort, o que acabamos de ver.
- Árvore de Fenwick que veremos agora!
- Árvore de Segmentos que também veremos a seguir.

A complexidade de todas as soluções é $\mathcal{O}(n \lg n)$.

Árvores

Somando intervalos

Dado um vetor v e os limites $[l, r]$, devolva a soma $\sum_{i=l}^{r} v_i$

- $\mathcal{O}(n)$ para calcular a soma uma vez
- Com consultas, fica $\mathcal{O}(qn)$
- Soma acumulada (aula passada) permite consultas $\mathcal{O}(1)$ — conseguimos $\mathcal{O}(q)$!

E se fosse permitido alterar os valores no meio do problema?

Somando intervalos e alterando valores

Dado um vetor v, $|v| = n$, responda a q consultas, que podem ser:

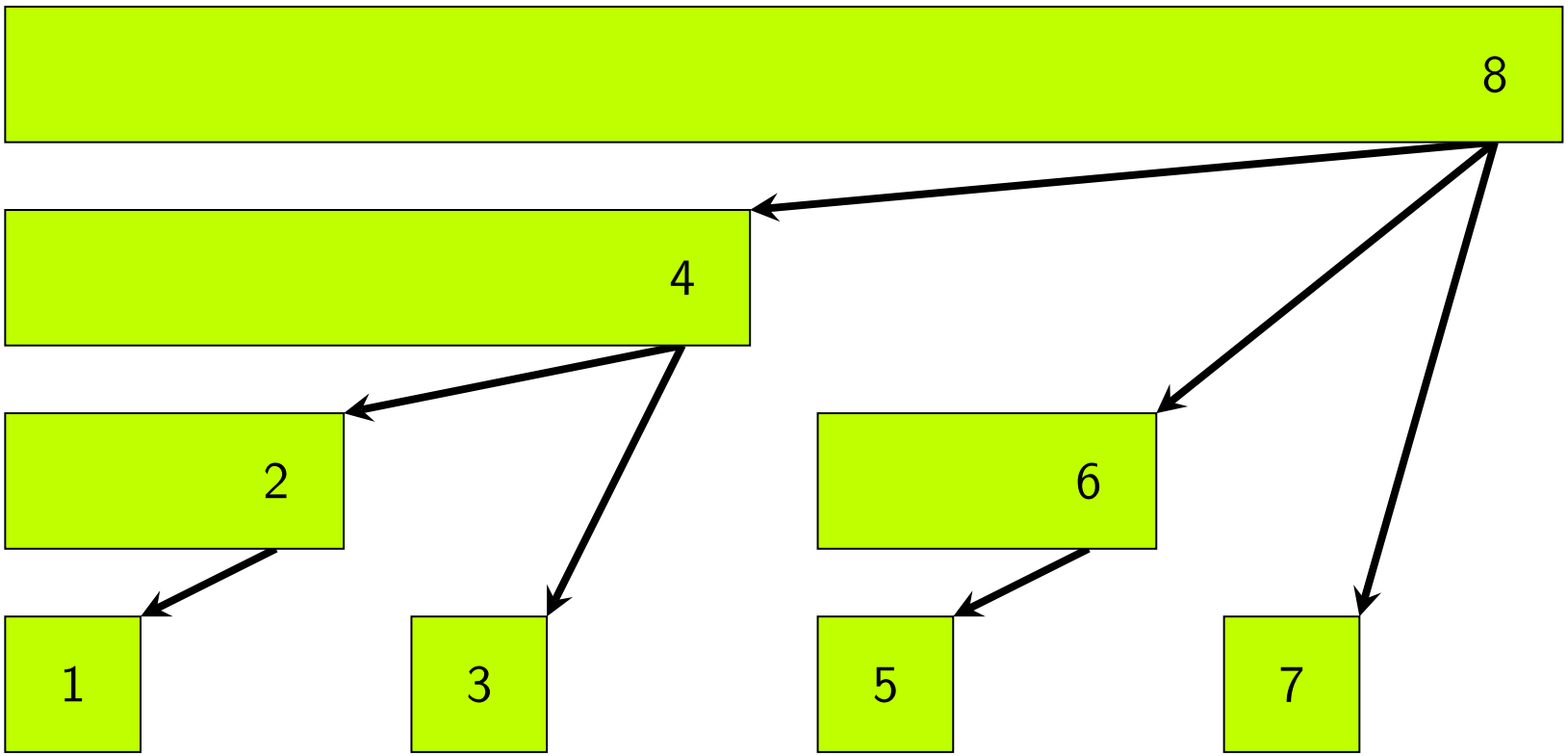
- Dados os limites $1 \leq l \leq r \leq n$, devolva a soma $\sum_{i=l}^{r} v_i$
- Dados os valores $1 \leq i \leq n$ e x, atribua a v_i o valor x

Agora precisaríamos atualizar a soma de prefixos toda vez, e voltamos ao $\mathcal{O}(qn)$.

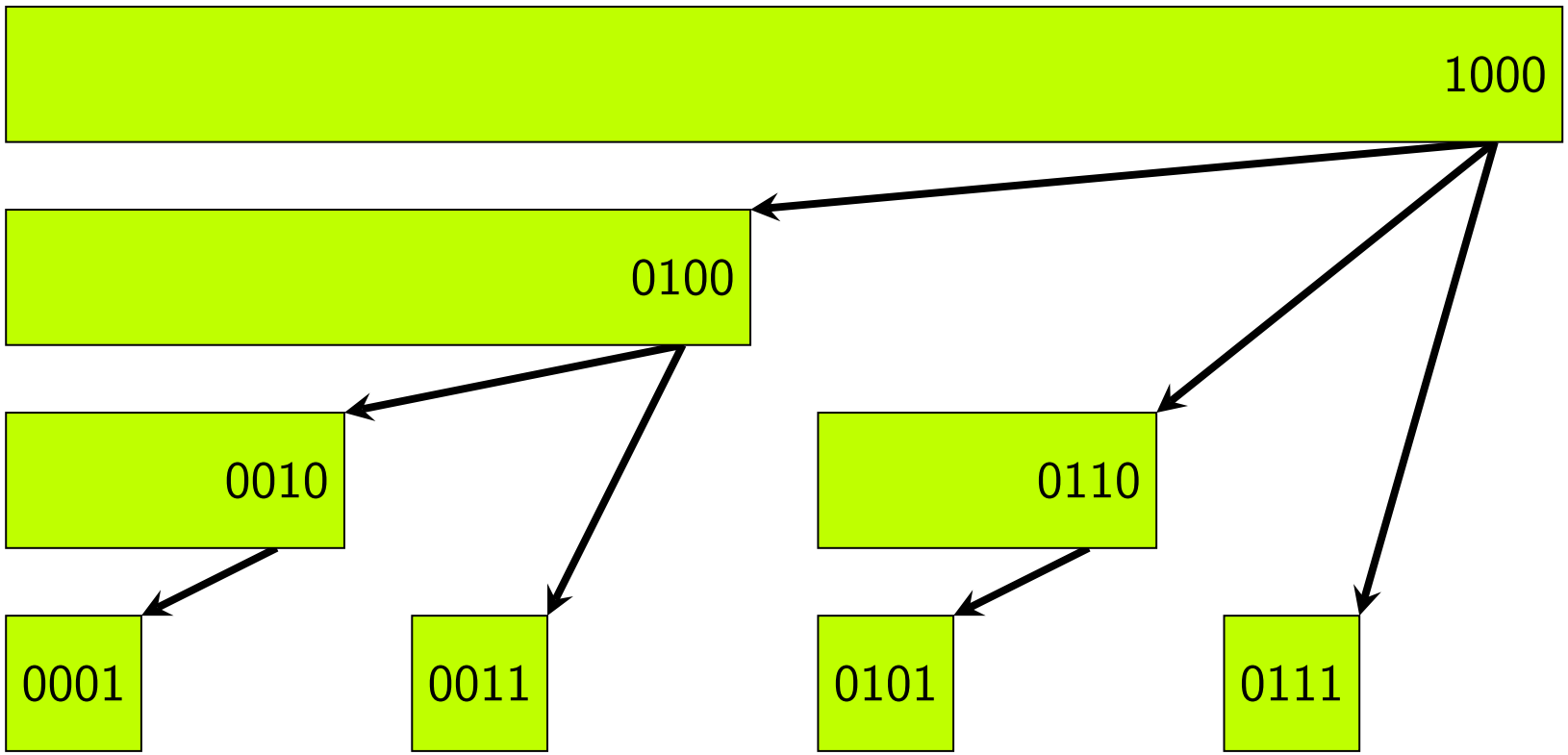
Árvore de Fenwick (BIT)

- Também conhecida como Binary Indexed Tree.
- Percorre o vetor em $\mathcal{O}(\lg n)$.
- Responde a problemas de consulta e alteração com funções reversíveis.
- É essencialmente um super vetor de prefixos.
- Cada posição da árvore guarda o valor para alguns elementos do vetor.
- Quais?

Responsabilidades de cada posição da árvore



Responsabilidades de cada posição da árvore (em binário)



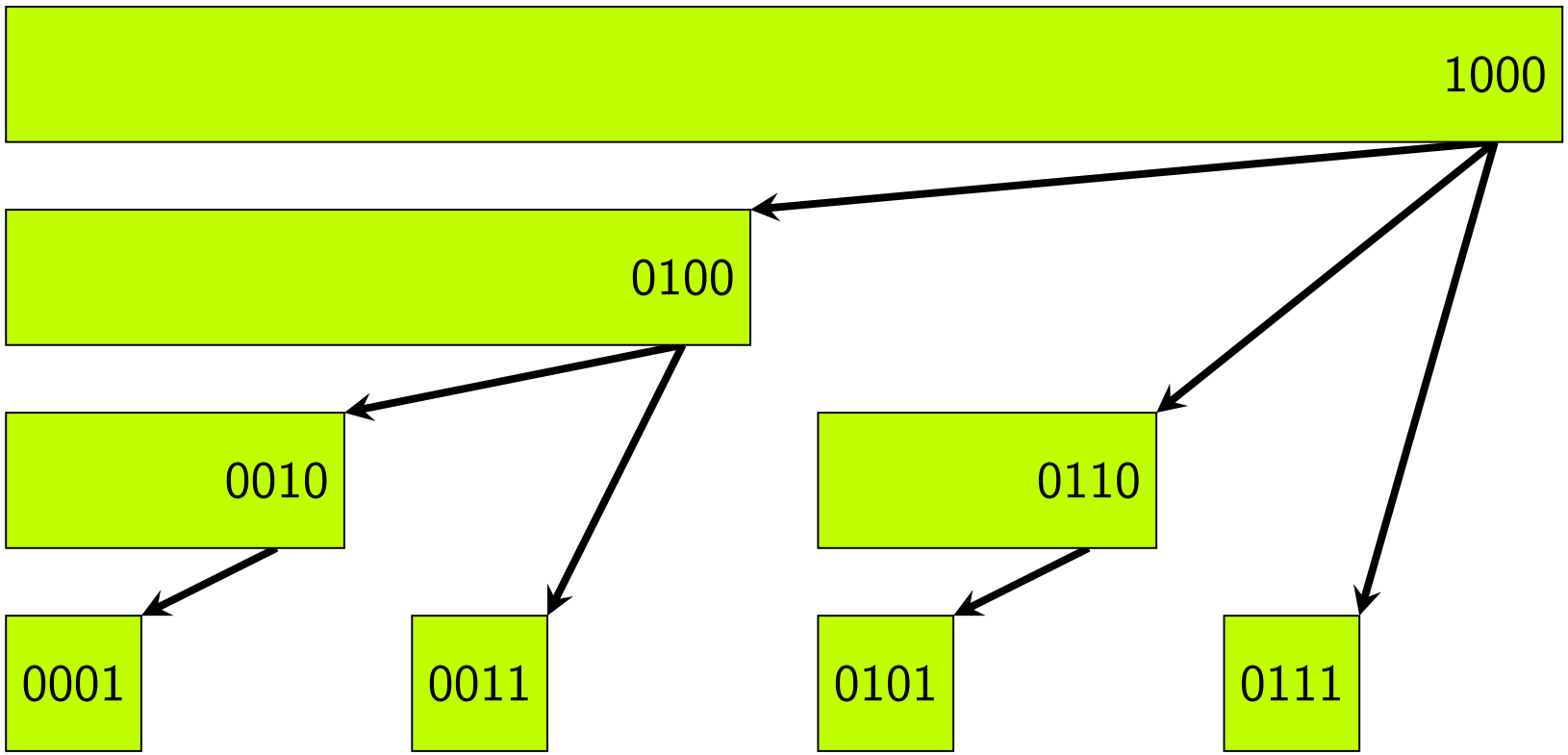
O caminho do bit menos significativo

Para cada índice $1 \leq i \leq n$, vamos guardar a soma dos últimos $\mathrm{LSOne}(i)$ elementos (incluindo i), onde $\mathrm{LSOne}(x)$ devolve o valor do bit menos significativo de x.
Observações importantes:

- **Caminho do decremento:** Para qualquer valor de i, podemos decrementá-lo em $\mathrm{LSOne}(i)$ e eventualmente chegaremos em $i = 0$: $111 \to 110 \to 100 \to 000$.
- **Caminho do incremento:** Para qualquer valor de $i > 0$, podemos incrementá-lo em $\mathrm{LSOne}(i)$ e eventualmente teremos $i \geq n$: $001 \to 010 \to 100 \to \ldots$.
- Seja $x = \mathrm{LSOne}(i)$. Os $x - 1$ valores imediatamente antes de i têm i em seus caminhos do incremento. Para $i = 6$, temos 0110 e 0101.
- O caminho do decremento de i passa por um valor no caminho do incremento de cada valor $j \leq i$.

Essa última fica mais fácil com um desenho.

Caminhando com LSOne(i)



Associação de elementos na BIT

Nossa BIT é um vetor de tamanho $n + 1$ (ignoramos o 0). Vamos atribuir a cada índice i a responsabilidade de guardar a soma no intervalo $[i - \mathrm{LSOne}(i) + 1, i]$.

- O índice i guarda o valor de consulta para todos os elementos que ele "cobre".
- **Consulta:** Se quisermos a soma de 1 até i, somamos os valores salvos no caminho do decremento de i ($\mathcal{O}(\log n)$).
- Se quisermos a soma de l até r, fazemos a operação anterior duas vezes.
- **Atualização:** Se mudarmos um valor no índice j, seguimos o caminho do incremento de j para atualizar os valores que dependem dele ($\mathcal{O}(\log n)$).

Implementação da BIT

Código `bit.h`

```
vector<int> bit (N, 0);
void add(int i, int delta) {
    for (; i < N; i += i & (-i))
        bit[i] += delta;
}
int get(int i) {
    int ans = 0;
    for (; i > 0; i -= i & (-i))
        ans += bit[i];
    return ans;
}
```

Usando a Árvore de Fenwick

Mais do que entender, precisamos saber usar. Geralmente, podemos usar a BIT das seguintes formas:

- Atualização em posição e consulta de intervalo.
  - Alteração da posição i é feita usando `add(i, delta)`.
  - Consulta do intervalo $[a, b]$ é feita fazendo `get(b) - get(a-1)`.
- Atualização em intervalo e consulta em posição.
  - Alteração do intervalo $[a, b]$ é feita fazendo `add(a, delta)` e `add(b+1, -delta)`.
  - Consulta da posição i é feita fazendo `get(i)`.

Outros usos possíveis envolvem o uso de árvores BIT 2D, e existem outros hacks utilizando de várias árvores para por exemplo permitir a alteração e consulta em intervalos, veja mais em `https://cp-algorithms.com/data_structures/fenwick.html`.

Atualização em posição e consulta em intervalo

Código updatepos.cpp

```
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
const int N = 1e5+15;
#include "bit.h"
int main() {
    char op; int a, b, i, d; string s;
    while (cin >> op) {
        if (op == '+') {
            cin >> i >> d; add(i, d);
        } else if (op == 'q') {
            cin >> a >> b;
            cout << get(b) - get(a-1) << "\n";
        } else getline(cin, s);
    }
}
```

Atualização em intervalo e consulta em posição (cont.)

Entrada	Saída
# 0 0 0 0 0 + 1 +1 # 1 0 0 0 0 + 2 +2 # 1 2 0 0 0 + 5 +3 # 1 2 0 0 3 q 1 3 q 1 5 + 2 -1 # 1 1 0 0 3 + 3 -3 # 1 1 -3 0 3 q 1 2 q 1 3 q 1 5 q 3 3	3 6 2 -1 2 -3

Atualização em intervalo e consulta em posição

Código updateinterval.cpp

```
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
const int N = 1e5+15;
#include "bit.h"
int main() {
    char op; int a, b, d, i; string s;
    while (cin >> op) {
        if (op == '+') {
            cin >> a >> b >> d;
            add(a, d); add(b+1, -d);
        } else if (op == 'q') {
            cin >> i; cout << get(i) << "\n";
        } else getline(cin, s);
    }
}
```

Atualização em intervalo e consulta em posição (cont.)

Entrada	Saída
# 0 0 0 0 0 + 1 5 +2 # 2 2 2 2 2 + 4 5 +3 # 2 2 2 5 5 + 1 2 -2 # 0 0 2 5 5 q 3 q 2 q 4 + 1 4 +2 # 2 2 4 7 5 q 4 q 2	2 0 5 7 2

Árvore de Segmentos

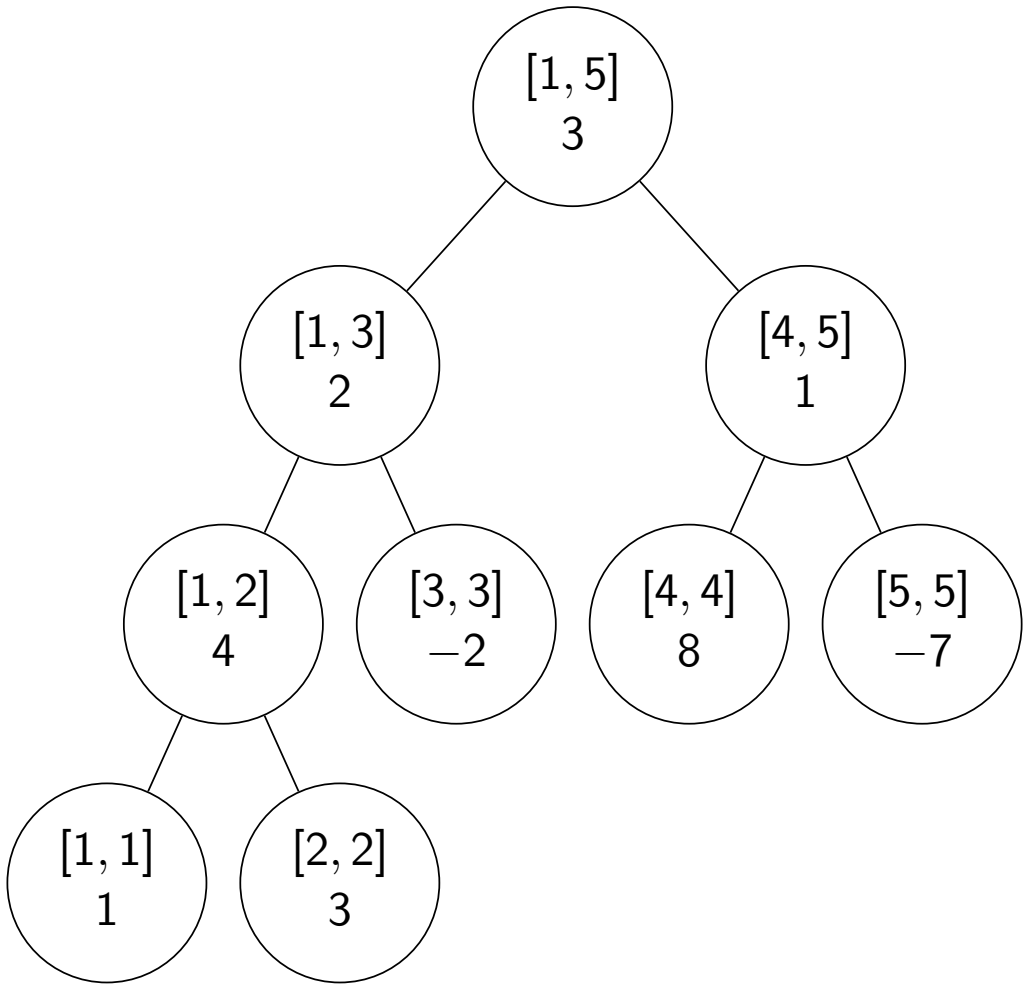
Podemos resolver este mesmo problema também com uma Árvore de Segmentos.

- Mais complicada que a BIT.
- Resolve, também, problemas mais complicados que os da BIT.
- É essencialmente o "encapsulamento" do conceito de divisão em conquista em uma estrutura.

A Árvore de Segmentos (Segment Tree, SegTree) é uma árvore binária onde cada nodo corresponde a um intervalo no seu vetor de consulta e atualização. Os nodos filhos correspondem às duas metades do intervalo.

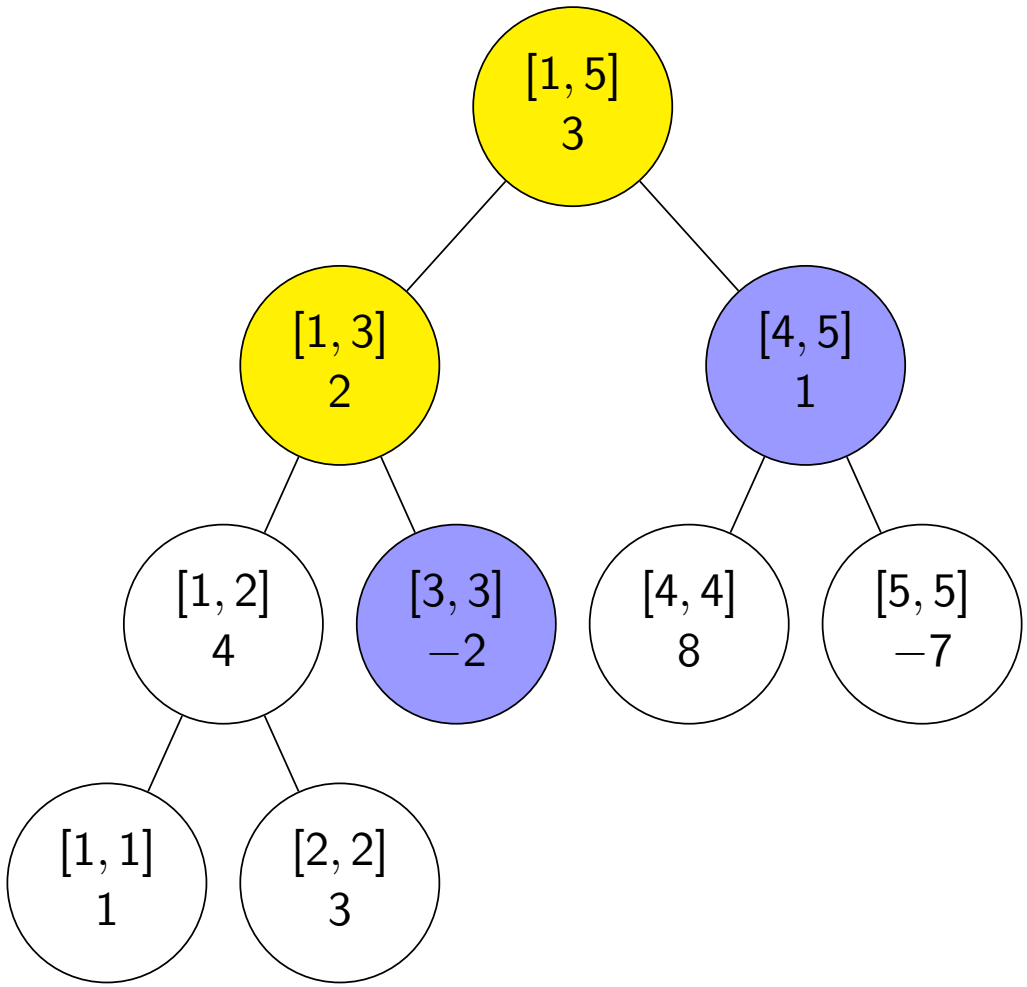
Árvore de Segmentos para um vetor de 5 elementos

Para o vetor $V = [1, 3, -2, 8, -7]$:



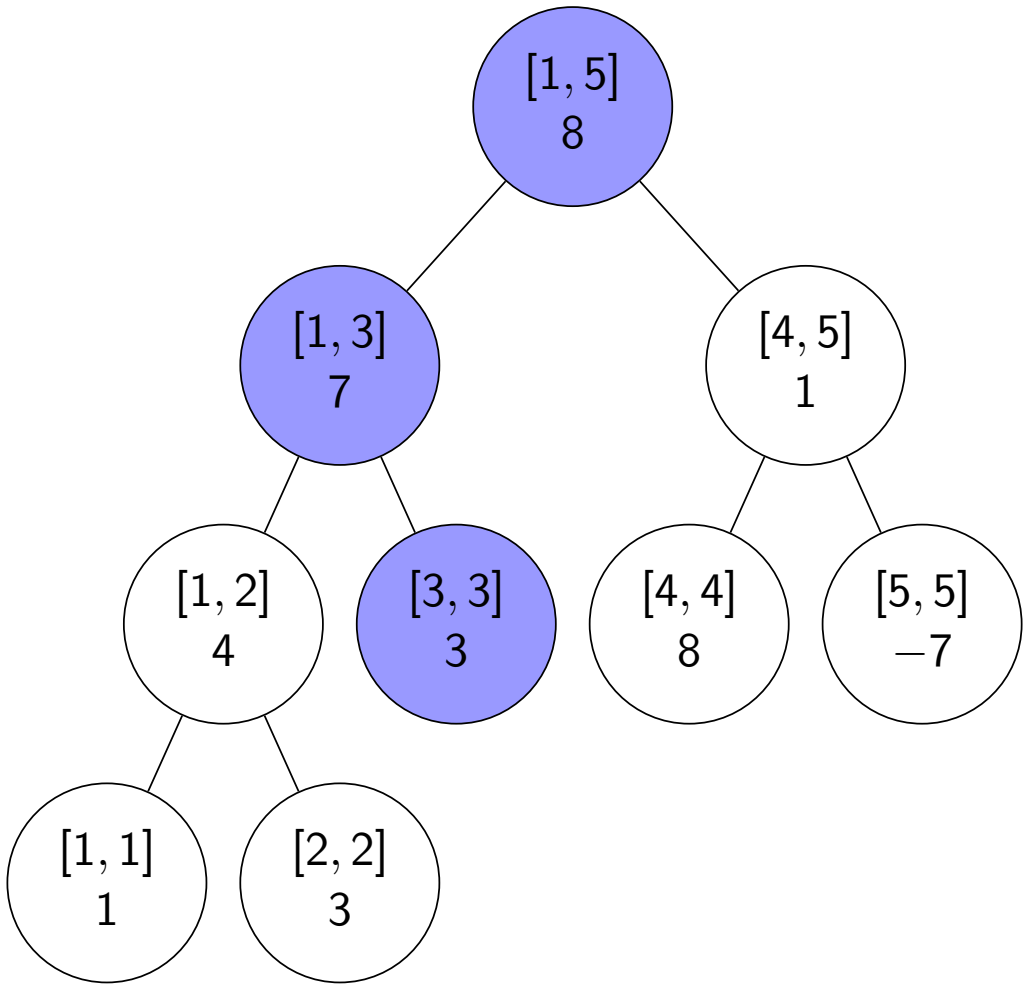
Consulta

Qual a soma do intervalo $[3, 5]$?



Atualização

Atribuindo o valor 3 ao elemento de índice 3:



Complexidade da Árvore de Segmentos

- **Construção:** $\mathcal{O}(N)$
- **Consulta:** $\mathcal{O}(\log N)$
- **Atualização:** $\mathcal{O}(\log N)$

Notas sobre a implementação recursiva

- É talvez a mais fácil de se entender e de memorizar.
- Usa muitos parâmetros nas funções pra poder guiar o código.
- Mais fácil de estender para permitir outras operações.
- Exige ao menos $4n$ memória.
- Confira mais detalhes no CP Algorithms (`https://cp-algorithms.com/data_structures/segment_tree.html`).

Consultas e alterações na árvore de segmentos recursiva

Código `strec.h`

```
vector<int> t (4*N);
int op_inclusive(int l, int r, int ti=1, int tl=1, int tr=N) {
    if (l > r) { return NEUTRAL; }
    if (l == tl && r == tr) { return t[ti]; }
    int tm = (tl + tr) / 2;
    return OP(op_inclusive(l, min(r, tm), ti*2, tl, tm),
        op_inclusive(max(l, tm+1), r, ti*2+1, tm+1, tr));
}
void set_value(int i, int v, int ti=1, int tl=1, int tr=N) {
    if (tl == tr) { t[ti] = v; return; }
    int tm = (tl + tr) / 2;
    if (i <= tm)
        set_value(i, v, ti*2, tl, tm);
    else
        set_value(i, v, ti*2+1, tm+1, tr);
    t[ti] = OP(t[ti*2], t[ti*2+1]);
}
```

Construção da árvore de segmentos recursiva

Código `strecbuild.h`

```
void build(vector<int>& src, int ti=1, int tl=1, int tr=N) {
    if (tl == tr) {
        if (tl < src.size()) { t[ti] = src[tl]; }
        return;
    }
    int tm = (tl + tr) / 2;
    build(src, ti*2, tl, tm);
    build(src, ti*2+1, tm+1, tr);
    t[ti] = OP(t[ti*2], t[ti*2+1]);
}
```

Notas sobre a versão iterativa

- O funcionamento não é exatamente o mesmo da recursiva, porém as mesmas complexidades são mantidas, e os conceitos são parecidos.
- A árvore gerada pela versão iterativa deve ser entendida mais como uma coleção de árvores binárias perfeitas.
- Exige só $2n$ de memória.
- Confira mais detalhes no blog do Codeforces (`https://codeforces.com/blog/entry/18051`).

Consultas e alterações na árvore de segmentos iterativa

Código `stit.h`

```
vector<int> t (2*N);

int op_inclusive(int l, int r) {
    r++;
    int left = NEUTRAL, right = NEUTRAL;
    for (l += N, r += N; l < r; l /= 2, r /= 2) {
        if (l & 1) left = OP(left, t[l++]);
        if (r & 1) right = OP(right, t[--r]);
    }
    return OP(left, right);
}

void set_value(int i, int v) {
    t[i += N] = v;
    for (i /= 2; i > 0; i /= 2)
        t[i] = OP(t[i*2], t[i*2+1]);
}
```

Construção da árvore de segmentos iterativa

Código `stitbuild.h`

```
void build(vector<int>& src) {
    for (int i = 1; i < src.size(); i++)
        t[N+i] = src[i];
    for (int i = N - 1; i > 0; i--)
        t[i] = OP(t[2*i], t[2*i+1]);
}
```

Usando a árvore de segmentos para somas

Código sumseg.cpp

```
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
const int N = 1e5+15;
#define NEUTRAL 0
#define OP(X, Y) (X + Y)
#include "stit.h"
#include "stitbuild.h"
int main() {
    int n; cin >> n; vector<int> src (n+1);
    for (int i = 1; i <= n; i++) { cin >> src[i]; }
    build(src);
    char op; int a, b, v, i; string s;
    while (cin >> op)
        if (op == '=') {
            cin >> i >> v; set_value(i, v);
        } else if (op == 'q') {
            cin >> a >> b;
            cout << op_inclusive(a, b) << "\n";
        } else getline(cin, s);
}
```

Usando a árvore de segmentos para somas (continuado)

Entrada	Saída
5 1 2 0 0 0 = 5 3 # 1 2 0 0 3 q 1 3 q 1 5 = 2 1 # 1 1 0 0 3 = 3 -3 # 1 1 -3 0 3 q 1 2 q 1 3 q 1 5 q 3 3	3 6 2 -1 2 -3

Usando a árvore de segmentos para máximo

Código `maxseg.cpp`

```
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
const int N = 1e5+15, oo = 987654321;
#define NEUTRAL -oo
#define OP(X, Y) max(X, Y)
#include "strec.h"
#include "strecbuild.h"
int main() {
    int n; cin >> n; vector<int> src (n+1);
    for (int i = 1; i <= n; i++) { cin >> src[i]; }
    build(src);
    char op; int a, b, v, i; string s;
    while (cin >> op)
        if (op == '=') {
            cin >> i >> v; set_value(i, v);
        } else if (op == 'q') {
            cin >> a >> b;
            cout << op_inclusive(a, b) << "\n";
        } else getline(cin, s);
}
```

Usando a árvore de segmentos para máximo (continuado)

Entrada	Saída
5 1 2 0 0 0 = 5 3 # 1 2 0 0 3 q 1 3 q 1 5 = 2 1 # 1 1 0 0 3 = 3 -3 # 1 1 -3 0 3 q 1 2 q 1 3 q 1 5 q 3 3	2 3 1 1 3 -3

E isso é tudo!

- O conteúdo que vocês precisam para fazer a competição que logo começará está todo aqui.
- É possível misturar essas estruturas de dados com outras coisas, por exemplo com a criação de nós customizados.
- Veremos mais adiante alguns conteúdos mais avançados relacionados como a Árvore de Segmentos Preguiçosa.
- É recomendado a leitura do material complementar de cada coisa!
- Bons estudos!