Aula 5 · Programação Dinâmica

Desafios de Programação

Fernando Kiotheka Vinícius Tikara Date

UFPR

19/04/2023

Memória e Soma de Prefixos

Memória

- Memória é um recurso essencial.
- Em muitos algoritmos podemos trocar **tempo** por **espaço**.
- Não precisamos recalcular o que já calculamos antes!
- Problemas recursivos que podem ser divididos em subproblemas geralmente são muito fáceis de serem resolvidos de forma incremental.

Soma de prefixos

Um problema simples: Dado um vetor, qual a soma de um intervalo $[a, b)$ do vetor indexado em $[0, n)$?

- Uma consulta apenas: Solução $\mathcal{O}(n)$ percorrendo todos os elementos no intervalo $[a, b)$.
- Várias consultas: Solução $\mathcal{O}(qn)$? É possível fazer melhor?

Podemos utilizar a associatividade da adição e sua operação inversa, a subtração.

$$(x + y) + z = x + (y + z).$$
$$(x + y) - y = x + (y - y) = x.$$

Isso nos permite que com a soma de cada prefixo (intervalo $[0, n]$) do vetor, seja possível obter a soma de qualquer intervalo $[a, b)$.

Organização do nosso vetor de soma de prefixos

Vamos organizar o nosso vetor assim:

$$v := \quad \left[{}_0 5 \; {}_1 1 \; {}_2 3 \; {}_3 \quad 5 \; {}_4 \quad 9 \; {}_5 \quad 2 \; {}_6 \right]$$

$$ps := \left[{}_0 0 \; {}_1 5 \; {}_2 6 \; {}_3 9 \; {}_4 14 \; {}_5 23 \; {}_6 25 \; {}_7 \right]$$

Para que a gente não precise ficar se preocupando com o caso onde a é 0, podemos simplesmente subtrair o 0 que já tem no vetor de soma de prefixos.

Implementação da soma de prefixo

Código `prefixsum.cpp`

```
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
int main() {
    int n; cin >> n; vector<int> v (n);
    for (int& x : v) { cin >> x; }
    vector<int> ps (n+1);
    ps[0] = 0;
    for (int i = 0; i < n; i++)
        ps[i+1] = ps[i] + v[i];
    int a, b; while (cin >> a >> b)
        cout << ps[b] - ps[a] << "\n";
}
```

Entrada	Saída
6 5 1 3 5 9 2 3 4 2 6	5 19

Implementação da soma de prefixo usando `partial_sum`

Código `partialsum.cpp`

```
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
int main() {
    int n; cin >> n; vector<int> v (n);
    for (int& x : v) { cin >> x; }
    vector<int> ps (n+1);
    ps[0] = 0;
    partial_sum(v.begin(), v.end(), ps.begin()+1);
    int a, b; while (cin >> a >> b)
        cout << ps[b] - ps[a] << "\n";
}
```

Entrada	Saída
6 5 1 3 5 9 2 3 4 2 6	5 19

Problema do Troco: Algoritmos Gananciosos e Programação Dinâmica

Soluções gananciosas/gulosas

Um algoritmo guloso/ganancioso constrói a solução de um problema escolhendo sempre o caminho que pareça ser o melhor, isto é, através de ótimos locais.

- Geralmente rápidos.
- Pode ser difícil determinar a estratégia gananciosa.
- Os ótimos locais realmente levam ao ótimo global?

Problema do Troco (conjunto fixo)

Qual o menor número de moedas do conjunto S necessárias para obter o valor V?

$$S = \{1, 2, 5, 10\}$$

Para $V = 25$, por exemplo, podemos usar 3 moedas: $\{10, 10, 5\}$.

Solução gananciosa do Problema do Troco (conjunto fixo)

Acontece que existe uma solução gananciosa para este problema, e é de escolher sempre a maior moeda que não passa do valor desejado (e decrementá-lo com o valor da moeda).
Intuição: estamos tirando o máximo possível do valor atual.

Implementação do Problema do Troco

Código `change1.cpp`

```
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
int n; vector<int> coins = {10, 5, 2, 1};
int main() {
    while (cin >> n) {
        int ans = 0;
        for (auto c : coins)
            while (c <= n) {
                n -= c;
                ans++;
            }
        cout << ans << '\n';
    } }
```

Entrada	Saída
13	3
27	4
50	5

Solução gananciosa do Problema do Troco (conjunto fixo)

Isso não funciona sempre. Tomemos por exemplo $S = \{1, 3, 4\}$ e $V = 6$:

1. Para $V = 6$, escolhemos a moeda 4 (`ans++`)
2. Para $V = 2$, escolhemos a moeda 1 (`ans++`)
3. Para $V = 1$, escolhemos a moeda 1 (`ans++`)

Poderíamos, no entanto, escolher a moeda 3 duas vezes!

Subproblemas, transições e estados

Observe que quando tiramos a moeda x do valor v, estamos procurando a resposta do troco mínimo para o valor $v - x$.
Isso significa que o nosso estado atual $troco(v)$ pode ser dado como a função do estados de $troco(v - x_1), \ldots, troco(v - x_n)$.

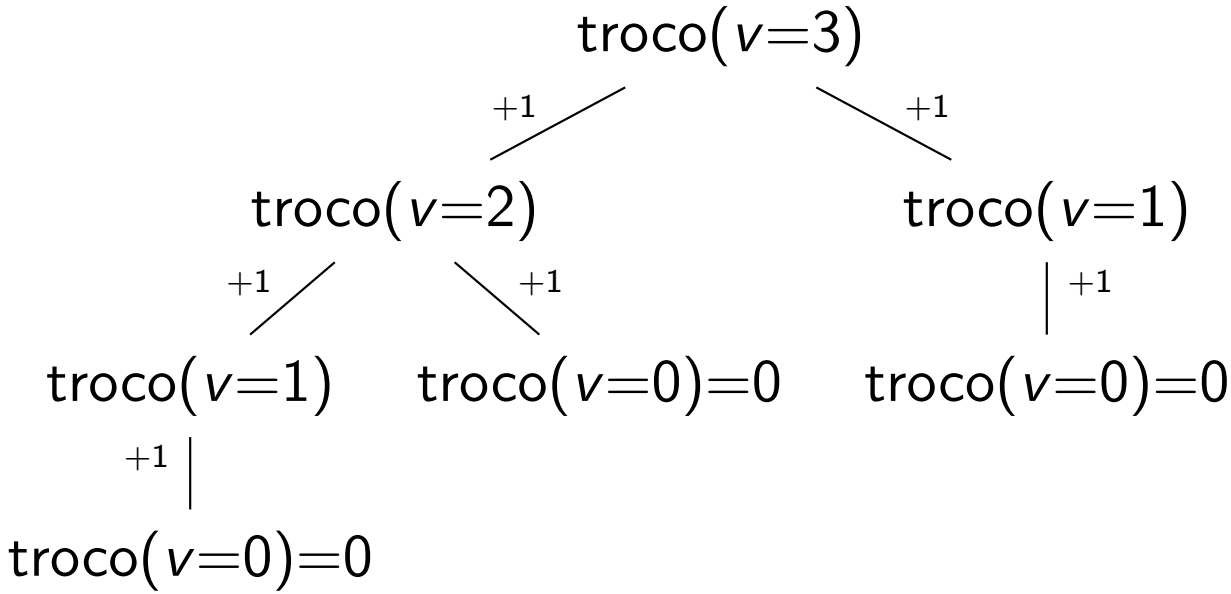
- **Estado** é um problema resolvido usando programação dinâmica. Ele tem um valor definido.
- **Funções de transição** ditam como um estado é mapeado para outros estados, isto é, como um problema é resultado da combinação de outros subproblemas.

O algoritmo se desenvolve como uma máquina de estados.

Solução de PD para o Problema do Troco (conjunto fixo)

$$troco(v) = \begin{cases} 0 & \text{se } v = 0 \\ 1 + \min\{troco(v - x) : x \in S \wedge x \leq v\} & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Para $S = \{1, 2, 5\}$:



Uma nota sobre notação

- Podemos escrever 10^4 como `1e4` em C++. Porém é necessário lembrar que isso é um *float*, então as vezes será necessário convertê-lo para inteiro se ficar ambíguo para o compilador assim: `int(1e4)`.
- Outra opção é ir contando a quantidade de zeros, então por exemplo 10^4 fica 11234. Usa um pouco mais de memória, mas vale a pena pra não levar Runtime Error.
- Você pode abusar da memória um pouco. É comum alocar alguns bytes a mais, por exemplo declarar um vetor com `int(1e4+15)` posições, só no caso delas serem úteis.
- E lembre-se que os literais de inteiros no C++ se adequam ao menor tamanho que se encaixa. Se você quer explicitamente um `long long` que caberia num `long`, **precisa** colocar um LL no seu literal assim: `1LL`. Fazer um `1 << n` ao invés de `1LL << n` já me custou um problema na competição!

Uma nota sobre o "infinito"!

- É comum precisarmos de um valor neutro para o mínimo.
- Um valor maior que todos usados no problema pode ser usado.
- Estimar esse valor não é fácil, e é fácil errar, sendo preferível simplesmente colocar um valor "grande".
- Os valores máximos dos inteiros, $2^{31} - 1$, $2^{63} - 1$ podem ser usados mas tem que ter muito cuidado.
- **Propriedade importante**: Somar infinito com infinito é comum, então não pode dar overflow.
- Por esse motivo geralmente se usam esses valores:
  - 987654321 e `0x3f3f3f3f` para `int`.
  - 1987654321987654321 e `0x3f3f3f3f3f3f3f3f` para `long long`.

Implementação do Problema do Troco (PD)

Código change2.cpp

```
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
int n; vector<int> coins = {1, 2, 5, 10};
const int oo = 987654321;
int main() {
    vector<int> troco(112, oo);
    troco[0] = 0;
    for (int i = 1; i <= 100; ++i)
        for (auto c : coins)
            if (c <= i)
                troco[i] = min(troco[i], 1+troco[i-c]);
    while (cin >> n) cout << troco[n] << '\n';
}
```

Entrada	Saída
0	0
7	2
100	10

Problema da Mochila

Problema da Mochila Fracionária

A história é de um ladrão de pequenas causas: Você quer roubar doces daquelas lojas que vendem vários tipos de doces diferentes a quilo. São N ($1 \leq N \leq 10^4$) doces diferentes e a sua mochila suporta apenas K ($1 \leq K \leq 10^4$) quilos, e você quer, obviamente, roubar as coisas mais valiosas do estabelecimento. Como escolher o que roubar e quanto roubar *otimamente*?

Doce	Peso	Valor
Marshmallow	40	840
Chocolate	30	600
Bala de goma	10	100
Bala de gelatina	20	400

Surpreendemente, esse é um problema fácil. É só pegar o máximo que pudermos dos itens que tem mais custo-benefício (valor/peso).

Implementação da Mochila Fracionária

Código `fractional.cpp`

```
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
struct itm { int w, v; string s; };
int main() {
    int n, k; cin >> n >> k;
    vector<itm> m (n);
    for (auto& [w, v, s] : m) { cin >> s >> w >> v; }
    sort(m.rbegin(), m.rend(), [](auto a, auto b) {
        return a.v*b.w < b.v*a.w; /* a.v/a.w < b.v/b.w */ });
    for (auto [w, v, s] : m) {
        cout << min(w, k) << "kg de " << s << "\n";
        k -= w; if (k <= 0) break; }
}
```

Entrada	Saída
4 53 marsh 40 840 choco 30 600 gelat 10 100 goma 20 400	40kg de marsh 13kg de choco

Problema da Mochila

Roubar lojas de doces não foi o suficiente porém. A próxima parada é o museu. Mas os N ($1 \leq N \leq 10^4$) itens do museu só têm valor se forem inteiros, então precisamos escolher quais itens que valem a pena, sabendo que a nossa mochila continuando suportando apenas K ($1 \leq K \leq 10^4$) quilos.

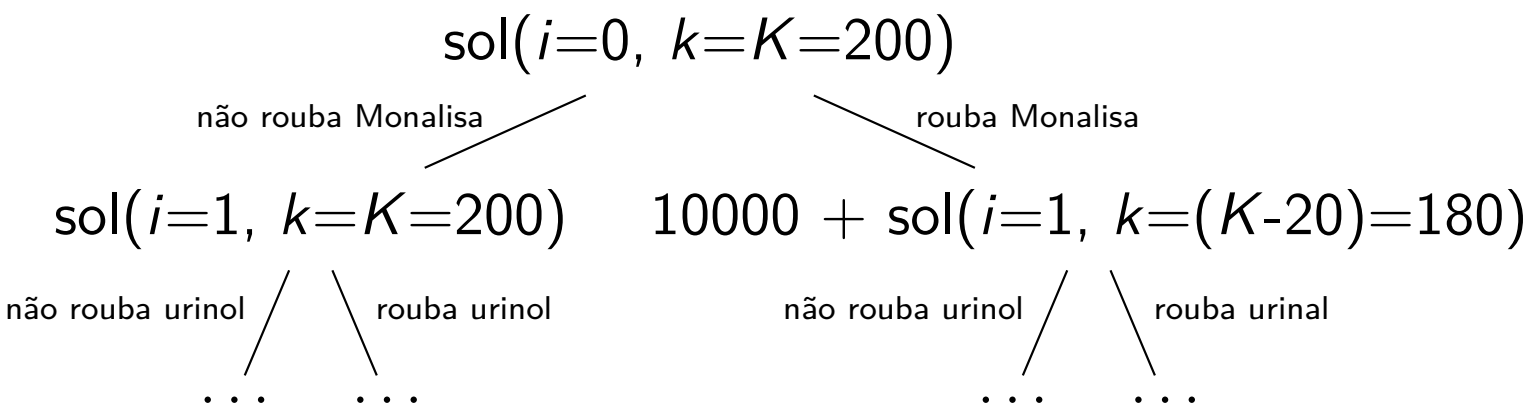
Obra de Arte	Peso	Valor
Monalisa	20	10000
Urinol	30	3302
Banana colada na parede	5	1200
Câmera do museu	20	300

Esse problema é... difícil.

Recursão ao resgate!

i	Obra de Arte	Peso	Valor
0	Monalisa	20	10000
1	Urinol	30	3302
2	Banana colada na parede	5	1200
3	Câmera do museu	20	300

$$s(i,k) = \begin{cases} 0 & \text{se } i = n \\ \max\{s(i+1,k), v[i] + s(i+1,k-w[i])\} & \text{se } k \geq w[i] \\ s(i+1,k) & \text{se } k < w[i] \end{cases}$$



Implementação do Problema da Mochila

Código knapsackrec.cpp

```
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
struct itm { int w, v; string s; };
int n; vector<itm> m (1e4);
int sol(int i, int k) {
    if (i == n) return 0;
    int best = sol(i+1, k); // skip
    if (k >= m[i].w) // get
        best = max(best, sol(i+1, k-m[i].w) + m[i].v);
    return best; }
int main() {
    int k; cin >> n >> k;
    for (auto& [w, v, s] : m) { cin >> s >> w >> v; }
    cout << "R$" << sol(0, k) << "\n"; }
```

Entrada	Saída
4 53 mona 20 10000 urin 30 3302 banana 5 1200 camera 20 300	R$ 13302

Alerta de problema exponencial!

- A nossa solução tem complexidade $\mathcal{O}(2^N)$.
- Essencialmente iteramos sobre todos os subconjuntos.
- "Tecnicamente", não tem como fazer melhor, mas a gente pode "roubar" trocando processamento por memória.
- Sabemos que
  - K, o tamanho da mochila limita o parâmetro k da função.
  - i pertence a $[0, N)$.
- Podemos usar uma matriz de tamanho $N \times K$, e apenas calcular o valor caso ele nunca tenha sido calculado antes.
- O nome dessa técnica é memoização.
- Nossa complexidade "roubada" é de $\mathcal{O}(NK)$.
- O problema da Mochila ainda é NP-Completo. O algoritmo é dito pseudopolinomial: $\mathcal{O}(N2^{\lg K})$.

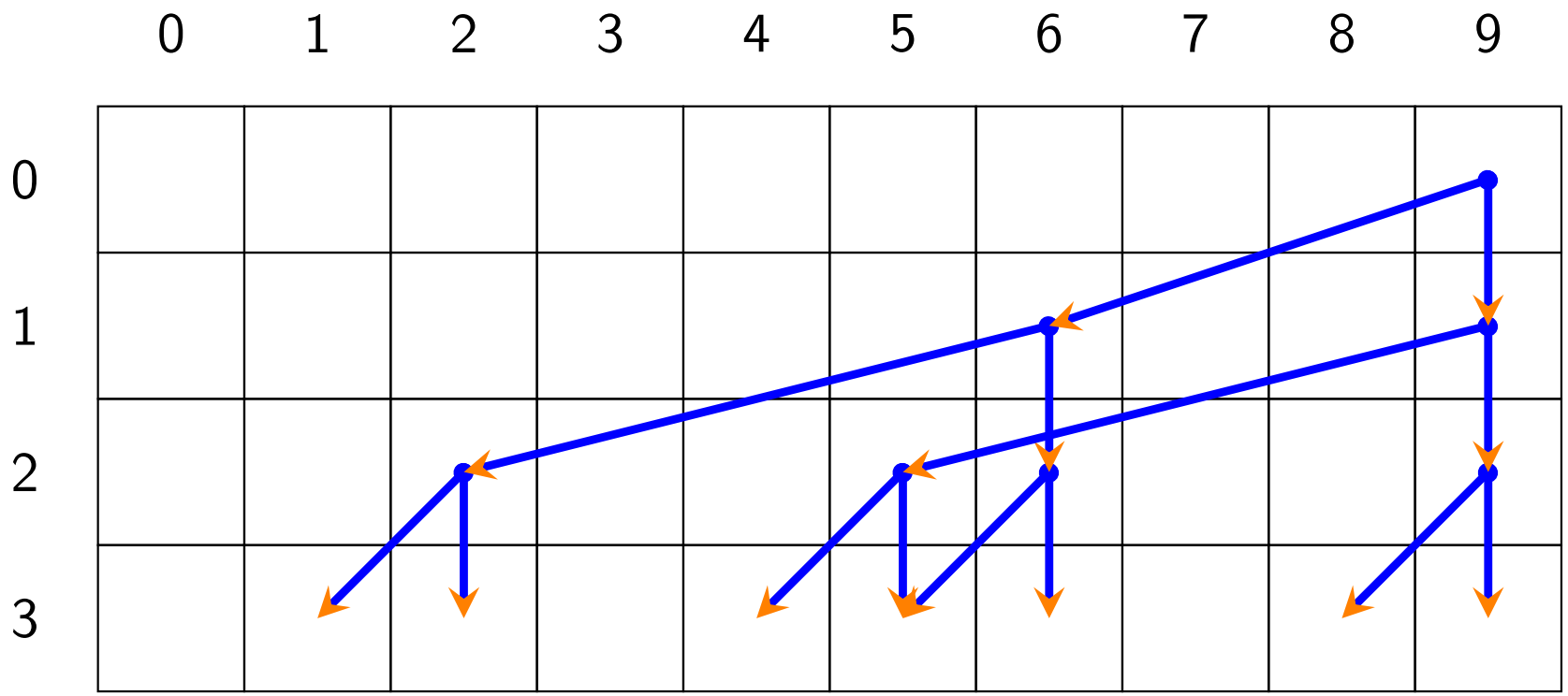
Implementação do Problema da Mochila com memoização

Código knapsackmem.cpp

```
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
struct itm { int w, v; string s; };
int n; vector<itm> m (1e4+1);
vector<vector<int>> dp (1e4+1, vector<int>(1e4+1, -1));
int sol(int i, int k) {
    if (i == n) { return 0; }
    if (dp[i][k] != -1) { return dp[i][k]; }
    int best = sol(i+1, k); // skip
    if (k >= m[i].w) // get
        best = max(best, sol(i+1, k-m[i].w) + m[i].v);
    return dp[i][k] = best;
}
int main() {
    int k; cin >> n >> k;
    for (auto& [w, v, s] : m) { cin >> s >> w >> v; }
    cout << sol(0, k) << "\n";
}
```

Dependências...

Uma PD produz naturalmente um grafo de dependências, pois os valores dos problemas dependem dos valores dos subproblemas. A solução recursiva é ótima. É relativamente fácil de se pensar na sua construção e as dependências se resolvem "automaticamente".



Matriz... esparsa?

Em muitos problemas, a matriz resultado da PD é esparsa. Isso é importante lembrar porque dependendo do problema, a matriz inteira não cabe em memória, mas ela pode ser guardada de forma esparsa, usando por exemplo um `map`.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	12
1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	8	-1	-1	10
2	-1	-1	5	-1	-1	7	7	-1	-1	7
3	-1	0	2	-1	2	2	2	-1	2	2

Mas minha solução recursiva é lenta!

- Existe um custo associado ao uso de funções recursivas relacionado a criação e destruição de pilhas de execução.
- Com uma matriz não esparsa, esse custo começa a pesar.
- Seria bom aproveitar da *cache*, acessando posições em sequência na memória.
- Solução: Programação Dinâmica Iterativa.
- O problema: Tem que fazer na ordem correta das dependências, senão o resultado **vai ser errado**.

Implementação do Problema da Mochila iterativo

Código knapsackit.cpp

```
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
int main() {
    int n, k; cin >> n >> k;
    struct itm { int w, v; string s; }; vector<itm> m (n);
    for (auto& [w, v, s] : m) { cin >> s >> w >> v; }
    vector<vector<int>> dp (1e4+1, vector<int>(1e4+1));
    for (int i = n; i >= 0; i--)
    for (int k = 0; k <= 1e4; k++) {
        if (i == n) { dp[i][k] = 0; continue; }
        int best = dp[i+1][k]; // skip
        if (k >= m[i].w) // get
            best = max(best, dp[i+1][k-m[i].w] + m[i].v);
        dp[i][k] = best;
    }
    cout << dp[0][k] << "\n";
}
```

Muito bem, mas quais são os itens da mochila mesmo?

- Sabemos responder qual o valor máximo que é possível alcançar com N itens e mochila com capacidade K.
- Mas qual seria os itens que atingem o valor máximo?
- Criamos uma matriz de *recuperação* do valor da PD.
- Ideia: Salvar qual o caminho foi tomado para cada chamada para depois reconstruírmos o caminho de trás pra frente.
- Lembre-se que muitas vezes múltiplas respostas são possíveis, então precisamos escolher uma.

Recuperando os itens da mochila

Código knapsackre.cpp

```
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
int main() {
    int n, k; cin >> n >> k;
    struct itm { int w, v; string s; }; vector<itm> m (n);
    for (auto& [w, v, s] : m) { cin >> s >> w >> v; }
    vector<vector<int>> dp (1e4+1, vector<int>(1e4+1));
    vector<vector<int>> nxt (1e4+1, vector<int>(1e4+1));
    for (int i = n; i >= 0; i--)
    for (int k = 0; k <= 1e4; k++) {
        if (i == n) { dp[i][k] = 0; continue; }
        nxt[i][k] = k; int best = dp[i+1][k]; // skip
        if (k >= m[i].w) { // get
            int get = dp[i+1][k-m[i].w] + m[i].v;
            if (get > best) { best = get; nxt[i][k] = k-m[i].w; }}
        dp[i][k] = best;
    }
    for (int i = 0; i < n; k = nxt[i][k], i++)
        if (nxt[i][k] != k) cout << m[i].s << "\n";
}
```

Recuperando os itens da mochila (continuado)

Entrada	Saída

`4 53`
`mona 20 10000 urin 30 3302`
`banana 5 1200 camera 20 300`
	`mona`
	`urin`

Eu não quero saber dos itens, dá pra reduzir a memória?

- Uma coisa que pode ter chamado a sua atenção é que nessa PD do Problema da Mochila só usamos o estado anterior para calcular o próximo.
- Isso significa que a gente pode usar apenas $\mathcal{O}(K)$ memória!
- Podemos criar uma matriz $2K$ e ficar alternando os valores usando `~1` por exemplo.
- Porém, lembre que a gente perde a recuperação dos itens, pois a gente não guarda exatamente tudo que a gente precisa pra poder reconstruir o caminho tomado.

Reduzindo a memória da PD

Código knapsackred.cpp

```
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
int main() {
    int n, k; cin >> n >> k;
    struct itm { int w, v; string s; }; vector<itm> m (n);
    for (auto& [w, v, s] : m) { cin >> s >> w >> v; }
    vector<vector<int>> dp (2, vector<int>(1e4+1));
    for (int i = n; i >= 0; i--)
    for (int k = 0; k <= 1e4; k++) {
        if (i == n) { dp[i&1][k] = 0; continue; }
        int best = dp[(i+1)&1][k]; // skip
        if (k >= m[i].w) // get
            best = max(best, dp[(i+1)&1][k-m[i].w] + m[i].v);
        dp[i&1][k] = best;
    }
    cout << dp[0&1][k] << "\n";
}
```

Outros Problemas em Programação Dinâmica

Maior subsequência crescente

Outro problema clássico resolvido com PD é o problema da maior subsequência crescente. Também chamado de LIS (Longest Increasing Subsequence), o problema busca encontrar o maior subsequência de números crescentes em um vetor.

$$v := \left[{}_0 10 \, {}_1 22 \, {}_2 9 \, {}_3 33 \, {}_4 21 \, {}_5 50 \, {}_6 41 \, {}_7 60 \, {}_8 80 \, {}_9 \right]$$

Para resolver esse problema, podemos pensar em cada posição do vetor e concluir qual a maior subsequência crescente que usa aquela posição, usando as posições anteriores como apoio.

$$lis(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0 \\ \max(\{1\} \cup \{1 + lis(i) : i \in [0, n) \wedge v[i] < v[n]\}) & \text{se } n > 0 \end{cases}$$

Solução recursiva para o LIS

Código `lisrec.cpp`

```
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
vector<int> v (1e3);
int sol(int n) {
    int mx = 1;
    for (int i = 0; i < n; i++) if (v[i] < v[n])
        mx = max(mx, 1 + sol(i));
    return mx; }
int main() {
    int n; while (cin >> n) { int mx = 0;
        for (int i = 0; i < n; i++) {
            cin >> v[i]; mx = max(mx, sol(i)); }
        cout << mx << "\n";
    }
}
```

Entrada	Saída
9 10 22 9 33 21 50 41 60 80	6
6 4 5 3 2 1 0	2

Solução *online*?

- A solução é *bottom-up*, diferente do *top-down* da mochila.
- Isso significa que a gente começa *do começo*, ao invés de começar resolvendo pelo final.
- Uma coisa legal é que isso nos permite ler e calcular o resultado para aquele vetor parcial imediatamente.
- Algoritmos assim são ditos *online*, em contraste com os algoritmos *offline* que precisam ler toda a entrada antes de poder responder o problema.
- Outro algoritmo *online* que você conhece: *Insertion Sort*.
- Os algoritmos *offline* nos permitem "xunxar" de alguns jeitos divertidos, mas a gente vai ver isso só pra frente.
- Porém, algoritmos *online* são sempre mais divertidos, afinal eles constróem a resposta iterativamente.

Ok, essa solução é lenta, cadê a PD?

Código `lismem.cpp`

```
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
vector<int> v (1e3), dp (1e3);
int sol(int n) {
    if (dp[n] != -1) { return dp[n]; }
    int mx = 1;
    for (int i = 0; i < n; i++) if (v[i] < v[n])
        mx = max(mx, 1 + sol(i));
    return dp[n] = mx;
}
int main() {
    int n; while (cin >> n) {
        fill(dp.begin(), dp.end(), -1); // importante!
        int mx = 0;
        for (int i = 0; i < n; i++) {
            cin >> v[i]; mx = max(mx, sol(i));
        }
        cout << mx << "\n";
    }
}
```

E a iterativa?

Código `lisit.cpp`

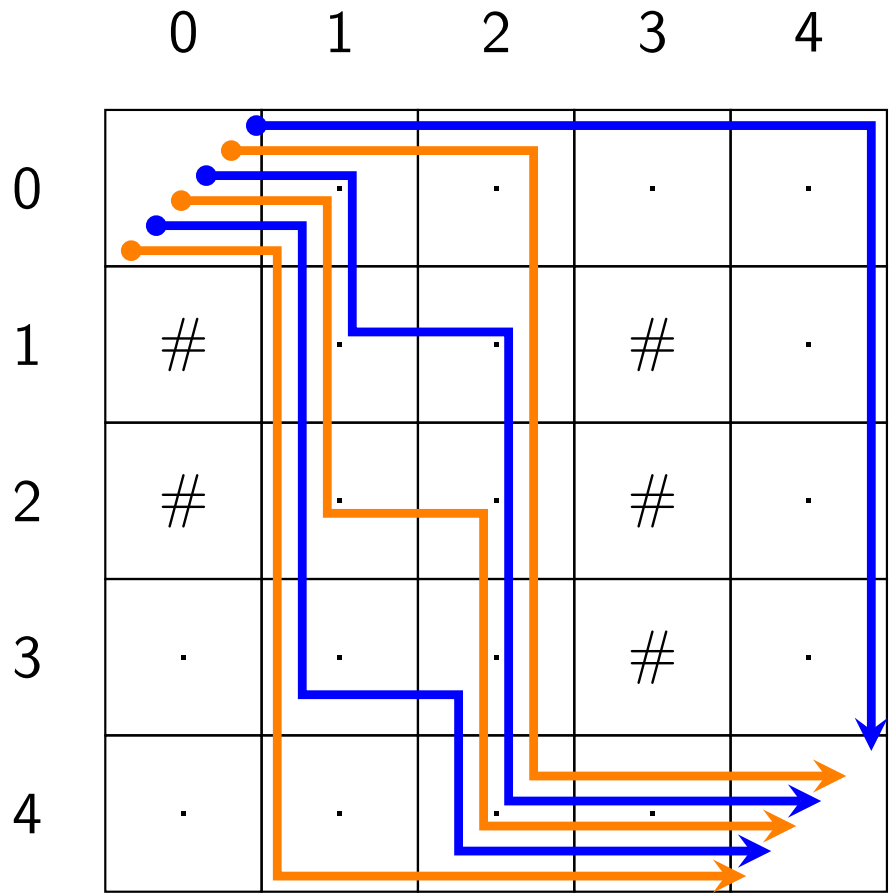
```
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
vector<int> v (1e3), dp (1e3);
int main() {
    int n; while (cin >> n) {
        fill(dp.begin(), dp.end(), 1); // base
        for (int i = 0; i < n; i++) {
            cin >> v[i];
            for (int j = 0; j < i; j++) if (v[j] < v[i])
                dp[i] = max(dp[i], 1 + dp[j]);
        }
        cout << *max_element(dp.begin(), dp.end()) << "\n";
    }
}
```

Acho que já entendi. Tem mais?

- Acabamos de resolver esse problema em $\mathcal{O}(n^2)$.
- Porém existe uma solução em $\mathcal{O}(n \lg n)$ que também é *online* que veremos mais pra frente no curso!

Caminhos na Grade

Que tal um problema de contagem 2D? Lhe é dado uma matriz $n \times n$, e você precisa descobrir de quantos jeitos diferentes um robô pode ir da posição $(0, 0)$ até a posição $(n-1, n-1)$ $(\text{mod } 10^9 + 7)$. O robô se move apenas para a direita e para baixo e não pode atravessar as paredes.



Exemplos

Entrada	Saída
5 ..... #..#. #..#. ...#.	6
9 ....#....	7970

Uma solução iterativa *top-down*

Código `gridtop.cpp`

```
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std; using ll = long long;
const int P = 1e9+7;
int main() {
    int n; cin >> n;
    vector<vector<char>> grid (n+2, vector<char>(n+2));
    for (int i = 1; i <= n; i++)
    for (int j = 1; j <= n; j++)
        cin >> grid[i][j];
    vector<vector<ll>> dp (n+2, vector<ll>(n+2, 0));
    // se aproveitamos que tudo é inicializada com zero
    for (int i = n; i >= 1; i--)
    for (int j = n; j >= 1; j--) {
        if (i == n && j == n) { dp[i][j] = 1; continue; }
        if (grid[i+1][j] == '.')
            dp[i][j] = (dp[i][j] + dp[i+1][j]) % P;
        if (grid[i][j+1] == '.')
            dp[i][j] = (dp[i][j] + dp[i][j+1]) % P;
    }
    cout << dp[1][1] << "\n";
}
```

Uma solução iterativa *bottom-up*

Código `gridbot.cpp`

```
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std; using ll = long long;
const int P = 1e9+7;
int main() {
    int n; cin >> n;
    vector<vector<char>> grid (n+2, vector<char>(n+2));
    for (int i = 1; i <= n; i++)
    for (int j = 1; j <= n; j++)
        cin >> grid[i][j];
    vector<vector<ll>> dp (n+2, vector<ll>(n+2));
    // se aproveitamos que tudo é inicializada com zero
    for (int i = 1; i <= n; i++)
    for (int j = 1; j <= n; j++) {
        if (i == 1 && j == 1) { dp[i][j] = 1; continue; }
        if (grid[i][j] == '.')
            dp[i][j] = (dp[i-1][j] + dp[i][j-1]) % P;
    }
    cout << dp[n][n] << "\n";
}
```

Probabilidade!

Comumente resolvemos probabilidades com programação dinâmica. Isto porque geralmente o problema é de probabilidade discreta ao invés de contínua. É comum encontrarmos:

- Problema de achar o valor de esperança (geralmente envolve o conceito de linearidade da esperança).
- Probabilidade de um evento em ponto flutuante (`double`).
- Probabilidade de um evento usando uma fração inteira (usando inverso multiplicativo modular).
- Combinação de eventos condicionais.

Problema das Moedas

Seja N ($1 \leq N \leq 2999$) um número positivo ímpar. Existem N moedas numeradas $i = 1,2,\ldots,N$, cada uma com probabilidade p_i de ser cara, e $1 - p_i$ de ser coroa. Qual a probabilidade de depois de jogadas as N moedas, mais moedas sejam cara do que coroa? Imprima a resposta em ponto flutuante. A saída será considerada correta se o erro absoluto não for maior que 10^{-9}.

Ponto flutuante e suas imprecisões

- Evite ponto flutuante ao máximo.
- Se precisar, sempre use no mínimo, `double`.
- Números em ponto flutuante devem sempre ser somados com valores de tamanho similar para obter menos imprecisão.
- A técnica de janela da aula anterior pode ajudar com isso.
- Problemas que pedem como saída um número em ponto flutuante geralmente toleram um certo erro.
- Imprima várias casas decimais caso exista essa tolerância de erro, ou a quantidade de casas exigida pelo problema.

As transições do Problema das Moedas

Vamos definir a função $f(n, h)$ como sendo a probabilidade de que dadas as n primeiras moedas, h sejam cara. Alguns valores:

- $f(0, 0) = 1$.
- $f(1, 0) = (1 - p_1)$.
- $f(1, 1) = p_1$.
- $f(1, 2) = 0$.
- $f(2, 0) = (1 - p_1)(1 - p_2) = f(1, 0) \cdot (1 - p_2)$.
- $f(2, 1) = (1-p_1)p_2+p_1(1-p_2) = f(1, 0)\cdot p_2+f(1, 1)\cdot(1-p_2)$.
- $f(2, 2) = f(1, 1) \cdot p_2 + f(1, 2) \cdot (1 - p_2) = f(1, 1) \cdot p_2$.

Genericamente então,

$$f(n, h) = \begin{cases} 1 \text{ se } n = h = 0 \\ 0 \text{ se } h > n \\ f(n - 1, 0) \cdot (1 - p_n) \text{ se } h = 0 \\ f(n - 1, h - 1) \cdot p_n + f(n - 1, h) \cdot (1 - p_n) \end{cases}$$

A solução

- Calcularemos a função $f(n, h)$.
- Somaremos a probabilidade do número de caras ser maior que o número de coroas, isto é, todo $f(n, h)$ com $h > \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ e com n sendo a quantidade total de moedas.
- Como somaremos números pequenos com números pequenos, não vamos usar técnicas para minimizar o erro.

Implementação do Problema das Moedas

Código coins.cpp

```
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
int main() {
    int n; cin >> n;
    vector<double> p (n+1);
    for (int i = 1; i <= n; i++) cin >> p[i];
    vector<vector<double>> f (n+1, vector<double>(n+1));
    f[0][0] = 1.0;
    for (int i = 1; i <= n; i++) {
        f[i][0] = f[i-1][0] * (1.0 - p[i]);
        for (int h = 1; h <= i; h++)
            f[i][h] = f[i-1][h-1] * p[i]
                    + f[i-1][h] * (1.0 - p[i]);
    }
    double ans = 0.0;
    for (int h = n/2+1; h <= n; h++) ans += f[n][h];
    cout << fixed << setprecision(10) << ans << "\n";
}
```

Implementação do Problema das Moedas (continuado)

Entrada	Saída
3 0.30 0.60 0.80	0.6120000000
1 0.50	0.5000000000
5 0.42 0.01 0.42 0.99 0.42	0.3821815872

E isso é tudo!

- O conteúdo que vocês precisam para fazer a competição que logo começará está todo aqui.
- Vale uma leitura extra: "DP on Broken Profile" (`https://cp-algorithms.com/dynamic_programming/profile-dynamics.html`).
- Verificando que o algoritmo ganancioso do problema do troco funciona para um determinado conjunto S: "A polynomial-time algorithm for the change-making problem" (`https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0167637704000823`)
- Existem muitas outras técnicas de otimização em programação dinâmica utilizando-se de simetrias geométricas, divisão e conquista, etc.
- Dá pra fazer programação dinâmica em grafos, é bem louco!
- Bons estudos!