INFO7056 - Tópicos em Algoritmos
CI084 - Tópicos em Teoria dos Grafos
(rascunho alterado constantemente)

André Guedes
Departamento de Informática
UFPR

2022/1 (texto de 2015)

(revisado em 20 de agosto de 2022)

1 Programa

- introdução
- K_n, $K_{p,q}$, C_n, P_n, etc
- tipos de definição de classes
  - propriedades (invariantes)
  - subgrafos proibidos
  - operadores
    - grafos de intersecção / modelos
    - decomposição
    - recursão
- Algoritmos básicos
  - BFS, DFS, LexBFS, MCS
- Problemas
  - Reconhecimento

  - Isomorfismo
  - Conjunto independente Máximo
  - Coloração
  - Coloração de arestas (edge coloring)
  - Clique máxima (maximum clique)
  - Partição de vértice em cliques (clique cover)
  - Cobertura de grafo por cliques
  - Conjunto dominante (dominating set)
  - Transversal de cliques (minimum clique transversal)
  - Maximum clique independent set
  - Minimum Vertex cover
  - Emparelhamento máximo (maximum mathing)
  - Edge cover
  - Hamiltoniano
  - Carteiro Chines
  - Fluxo
  - Interval Number

- Ordens
  - Vértice simplicial
  - aresta bissimplicial
    - An edge $\{u, v\}$ in a bipartite graph B is called bisimplicial if $N(u) \cup N(v)$ induces a biclique in B.
  - ordem de eliminação perfeita
    - A perfect elimination ordering in a graph is an ordering of the vertices of the graph such that, for each vertex v, v and the neighbors of v that occur after v in the order form a clique. A graph is chordal if and only if it has a perfect elimination ordering.
    - Chordal.
  - ordem de vizinho máximo

        * A vertex $u \in N[v]$ is a maximum neighbour of v if for all $w \in N[v]$, $N[w] \subseteq N[u]$. A vertex ordering $v_1, \ldots, v_n$ is a maximum neighbourhood ordering if for each $i < n$, v_i has a maximum neighbour in G_i.
        * Dually chordal.
    - ordem de eliminação perfeita de arestas
        * For an edge ordering $e_1, \ldots, e_k$ let S_i be the set of endpoints of $e_1, \ldots, e_i$ and $S_0 = \emptyset$. $e_1, \ldots, e_k$ is a perfect edge elimination ordering for a bipartite graph $B = (V, E)$ if $B[V \setminus S_k]$ has no edges, and each edge e_i is bisimplicial in $B[V \setminus S_{i-1}]$. B is perfect elimination bipartite if it admits a perfect edge elimination ordering.
    - ordem de eliminação perfeita de arestas-não-vértices
        * Let $(e_1, \ldots, e_m)$ be an ordering of the edges of G. Let $G_0 = G$ and $G_i = G_{i-1} \setminus e_i$ (G_i is obtained from G_{i-1} by removing the edge e_i but not its end vertices). The ordering $(e_1, \ldots, e_m)$ is a perfect edge-without-vertex elimination ordering if e_i is bisimplicial in G_{i-1} for all $1 \leq i \leq m$.
        * A bipartite graph is chordal bipartite if it admits a perfect edge-without-vertex elimination ordering.

- Decomposições e Separadores

- Classes
    - cordais
    - perfeitos
    - Intervalos
    - arco-circulares
    - trapezoidais
    - bipartidos cordais
    - permutação
    - bipartido de permutação
    - split / threshold
    - linha
    - grafo clique
    - grafo biclique

2 Introdução

Por que usar classes de grafos?

Problema $\mathcal{P}$ definido sobre todos os grafos. $\mathcal{P}$ pode ser NP-difícil em geral, mas pode ter algoritmo polinomial para um conjunto restrito de grafos.

Exemplo: coloração de vértices é NP-difícil em geral, mas é polinomial para grafos perfeitos.

Podemos definir uma classe de grafos de diversas formas. Em geral usamos uma certa propriedade que os grafos da classe satisfazem.

Exemplo: grafos bipartidos são os grafos que admitem uma bipartição de seus vértices de forma que não existem arestas entre vértices da mesma parte.

Quando temos uma classe de grafos $\mathcal{A}$, o problema de reconhecer se um certo grafo G está em $\mathcal{A}$ é denominado de "problema de reconhecimento de $\mathcal{A}$". Nem toda classe pode ser reconhecida facilmente.

Exemplo: reconhecer grafos planares é polinomial, mas reconhecer grafos 1-planar é NP-completo.

Em geral, se temos um problema NP-completo $\mathcal{P}$ e uma classe $\mathcal{A}$, tal que $\mathcal{P}$ restrito a $\mathcal{A}$ ($\mathcal{P}_{\mathcal{A}}$) e o reconhecimento de $\mathcal{A}$ são polinomiais, temos um algoritmo que roda em tempo polinomial se o grafo de entrada é de $\mathcal{A}$.

Classes de grafos podem ser hierárquicas ou não.

Uma classe $\mathcal{A}$ é hierárquica se todo subgrafo induzido de um grafo da classe é também da classe. Ou seja,

$$G \in \mathcal{A} \Leftrightarrow \text{ para todo } H \subseteq G, H \in \mathcal{A}.$$

3 Definições de classes

K_n, $K_{p,q}$, C_n, P_n, etc

- propriedades (invariantes)

  Exemplos:

  - Grafos com grau máximo d
  - Grafos com clique máxima de tamanho c
  - árvores (conexos e acíclios)

- subgrafos proibidos

  Exemplos:

  - Grafos sem triângulos

  - Grafos sem ciclo ímpar (bipartidos)
  - Grafos H-free

- operadores

  - grafos de intersecção / modelos

    Exemplos:

    * Grafos de intervalos
    * Grafo linha
    * Grafo de intersecção de subárvores de uma árvore (cordais)

  - decomposição

    Exemplos:

    * Cografos (decomposição modular)
    * Join
    * Grafos com separadores clique

- ordens

  Exemplos:

  - Grafos de intervalos (ordem de fim dos intervalos)
  - Grafos cordais (ordem perfeita de eliminação)
  - Grafos bipartido cordal (ordem perfeita de eliminação de arestas-não-vértices)

4 Ordens

- Vértice simplicial
- aresta bissimplicial

  - An edge $\{u, v\}$ in a bipartite graph B is called bisimplicial if $N(u) \cup N(v)$ induces a biclique in B.

- ordem perfeita de eliminação

  - A perfect elimination ordering in a graph is an ordering of the vertices of the graph such that, for each vertex v, v and the neighbors of v that occur after v in the order form a clique. A graph is chordal if and only if it has a perfect elimination ordering.

  - Chordal.

- ordem de vizinho máximo
  - A vertex $u \in N[v]$ is a maximum neighbour of v if for all $w \in N[v]$, $N[w] \subseteq N[u]$. A vertex ordering $v_1, \ldots, v_n$ is a maximum neighbourhood ordering if for each $i < n$, v_i has a maximum neighbour in G_i.
  - Dually chordal.

- ordem perfeita de eliminação de arestas
  - For an edge ordering $e_1, \ldots, e_k$ let S_i be the set of endpoints of $e_1, \ldots, e_i$ and $S_0 = \emptyset$. $e_1, \ldots, e_k$ is a perfect edge elimination ordering for a bipartite graph $B = (V, E)$ if $B[V \setminus S_k]$ has no edges, and each edge e_i is bisimplicial in $B[V \setminus S_{i-1}]$. B is perfect elimination bipartite if it admits a perfect edge elimination ordering.

- ordem de eliminação perfeita de arestas-não-vértices
  - Let $(e_1, \ldots, e_m)$ be an ordering of the edges of G. Let $G_0 = G$ and $G_i = G_{i-1} \setminus e_i$ (G_i is obtained from G_{i-1} by removing the edge e_i but not its end vertices). The ordering $(e_1, \ldots, e_m)$ is a perfect edge-without-vertex elimination ordering if e_i is bisimplicial in G_{i-1} for all $1 \leq i \leq m$.
  - A bipartite graph is chordal bipartite if it admits a perfect edge-without-vertex elimination ordering.

5 Decomposições e Separadores

- decomposição modular
- separador clique
- decomposição em componentes biconexas / blocos

6 Classes

- cordais
- perfeitos

- intervalos
- arco-circulares
- trapezoidais
- bipartidos cordais
- permutação
- bipartido de permutação
- split / threshold
- linha
- grafo clique
- grafo biclique
- planar
- 1-planar