



Grafos de Comparabilidade

Tópicos em Teoria dos Grafos - Ciência da Computação - UFPR
Viviane da Rosa Sommer - GRR20182564



Grafos de comparabilidade

Na teoria dos grafos, um Grafo de Comparabilidade pode ser definido como:

“O Grafo G é uma Comparabilidade se for orientável transitivamente, ou seja, se $a \rightarrow b$ e $b \rightarrow c$ são arestas direcionadas, então $a \rightarrow c$ também é uma aresta direcionada.”

Grafos de comparabilidade

Portanto, podemos considerar que um Grafo de Comparabilidade é um grafo que conecta pares de elementos que são comparáveis entre si em uma ordem parcial.

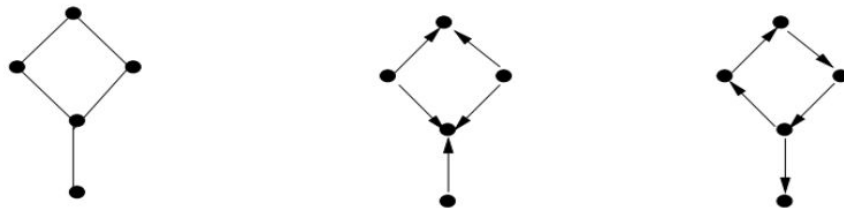


Figure 3.1: A comparability graph, an acyclic transitive orientation and orientation that is neither acyclic nor transitive



Grafos de comparabilidade - Propriedades

Com base na definição apresentada, é possível notar que os Grafos de Comparabilidade possuem duas propriedades principais:

1. Anti-simetria: Se a aresta $a \rightarrow b$ existe, então $b \rightarrow a$ não existe.
2. Transitividade: Se as arestas $a \rightarrow b$ e $b \rightarrow c$ existem, então $a \rightarrow c$ também existe.



Grafos de Comparabilidade

Resumidamente, os Grafos de Comparabilidade capturam uma ordem parcial ou precedência entre pares de vértices.

Por exemplo, uma aresta $a \rightarrow b$ pode transmitir a restrição de que o evento “a” deve preceder o evento “b”.

Contudo, é importante ressaltar que o problema de atribuir direção às arestas não é trivial, como será visto mais a frente.



Relações com outras Famílias de Grafos

Grafos Completos

- É interessante se analisar que todo Grafo Completo é um Grafo de Comparabilidade.
- Nesse caso, o grafo completo possui uma ordenação total de seus vértices.



Relações com outras Famílias de Grafos

Grafos Bipartidos

- Todo Grafo Bipartido é um Grafo de Comparabilidade. Para se entender essa relação, basta analisar as propriedades dos Grafos de Comparabilidade (Anti-simetria e Transitividade), que são propriedades também dos Bipartidos.
- Também é possível orientar as arestas de um grafo bipartido de um lado da bipartição para o outro, resultando em uma orientação transitiva, o que corresponde a uma ordem parcial de altura dois.



Relações com outras Famílias de Grafos

Grafos Intervalares

- O complemento de qualquer Grafo de Intervalo é um gráfico de comparabilidade.
- Essa relação entre os Grafos de Comparabilidade e os Grafos de Intervalo é chamada de Ordem de Intervalo.



Relações com outras Famílias de Grafos

Grafos Perfeitos

- Todo Grafo de Comparabilidade é um Grafo Perfeito. A perfeição dos grafos de comparabilidade é apresentado no teorema de Mirsky, e a perfeição de seus complementos apresentado no teorema de Dilworth.
- Mais especificamente, Grafos de Comparabilidade são grafos perfeitamente ordenáveis, portanto, são uma subclasse de Grafos Perfeitos.



Problemas Importantes

Como os Grafos de Comparabilidade são Perfeitos, muitos problemas que são difíceis em classes mais gerais de grafos, incluindo a coloração de grafos e o problema do conjunto independente, podem ser resolvidos em tempo polinomial para os Grafos de Comparabilidade.

Outro problema interessante é encontrar uma orientação transitiva de um grafo (se existir). O algoritmo que resolve esse problema, se atribui orientações às arestas de qualquer grafo, então para completar a tarefa de testar se um grafo é um Grafo de Comparabilidade, deve-se testar se a orientação resultante é transitiva, um problema comprovadamente equivalente em complexidade à matriz multiplicação.



Grafos de Co-Comparabilidade

A classe dos grafos de Co-Comparabilidade pode ser definida como:

- O Grafo G é Co-comparabilidade se o gráfico complementar de G é um Grafo de Comparabilidade.

Com essa definição e sabendo da relação entre Grafos de Comparabilidade e Grafos Intervalares, pode-se concluir que todo Grafo de Intervalo é também um Grafo de Co-comparabilidade.

Contudo, é importante ressaltar que nem todo Grafo de Co-comparabilidade é um Grafo de Intervalo.



Referências Bibliográficas

[1] Relatório de Resumo das aulas Aula 02 - Universidade Federal do Rio de Janeiro. Acesso: <https://www.cos.ufrj.br/~celina/cursos/cps845/aula02.pdf>

[2] Grafos de Comparabilidade - Teoria dos Grafos. Acesso: https://en.wikipedia.org/wiki/Comparability_graph#:~:text=In%20graph%20theory%2C%20a%20comparability,containment%20graphs%2C%20and%20divisor%20graphs.

[3] Information System on Graph Classes and their Inclusions. Acesso: https://www.graphclasses.org/classes/gc_72.html



Referências Bibliográficas

[4] Comparability Graphs - Indian Institute of Technology Delhi. Acesso: <https://www.cse.iitd.ac.in/~naveen/courses/CSL851/arpit.pdf>

[5] Graph properties of minimization of open stacks problems and a new integer programming model. Acesso: https://www.researchgate.net/publication/282459522_GRAPH_PROPERTIES_OF_MINIMIZATION_OF_OPEN_STACKS_PROBLEMS_AND_A_NEW_INTEGER_PROGRAMMING_MODEL

[6] Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs. Acesso em : [https://www.scirp.org/\(S\(351jmbntvnsjt1aadkposzje\)\)/reference/ReferencesPapers.aspx?ReferenceID=1961279](https://www.scirp.org/(S(351jmbntvnsjt1aadkposzje))/reference/ReferencesPapers.aspx?ReferenceID=1961279)

[7] Graph Classes: A Survey. Acesso em: <https://epubs.siam.org/doi/abs/10.1137/1.9780898719796>