

INFO7056 - Tópicos em Algoritmos

CI084 - Tópicos em Teoria dos Grafos

(rascunho alterado constantemente)

André Guedes
Departamento de Informática
UFPR

2022/1 (texto de 2015)

(revisado em 23 de janeiro de 2024)

1 Programa

- introdução
- K_n , $K_{p,q}$, C_n , P_n , etc
- tipos de definição de classes
 - propriedades (invariantes)
 - subgrafos proibidos
 - operadores
 - * grafos de intersecção / modelos
 - * decomposição
 - * recursão
- Algoritmos básicos
 - BFS, DFS, LexBFS, MCS
- Problemas
 - Reconhecimento

- Isomorfismo
- Conjunto independente Máximo
- Coloração
- Coloração de arestas (edge coloring)
- Clique máxima (maximum clique)
- Partição de vértice em cliques (clique cover)
- Cobertura de grafo por cliques
- Conjunto dominante (dominating set)
- Transversal de cliques (minimum clique transversal)
- Maximum clique independent set
- Minimum Vertex cover
- Emparelhamento máximo (maximum matching)
- Edge cover
- Hamiltoniano
- Carteiro Chines
- Fluxo
- Interval Number
- Ordens
 - Vértice simplicial
 - aresta bissimplicial
 - * An edge $\{u, v\}$ in a bipartite graph B is called bisimplicial if $N(u) \cup N(v)$ induces a biclique in B .
 - ordem de eliminação perfeita
 - * A perfect elimination ordering in a graph is an ordering of the vertices of the graph such that, for each vertex v , v and the neighbors of v that occur after v in the order form a clique. A graph is chordal if and only if it has a perfect elimination ordering.
 - * Chordal.
 - ordem de vizinho máximo

- * A vertex $u \in N[v]$ is a maximum neighbour of v if for all $w \in N[v]$, $N[w] \subseteq N[u]$. A vertex ordering $v_1, \dots, v_n$ is a maximum neighbourhood ordering if for each $i < n$, v_i has a maximum neighbour in G_i .
- * Dually chordal.
- ordem de eliminação perfeita de arestas
 - * For an edge ordering $e_1, \dots, e_k$ let S_i be the set of endpoints of $e_1, \dots, e_i$ and $S_0 = \emptyset$. $e_1, \dots, e_k$ is a perfect edge elimination ordering for a bipartite graph $B = (V, E)$ if $B[V \setminus S_k]$ has no edges, and each edge e_i is bisimplicial in $B[V \setminus S_{i-1}]$. B is perfect elimination bipartite if it admits a perfect edge elimination ordering.
- ordem de eliminação perfeita de arestas-não-vértices
 - * Let $(e_1, \dots, e_m)$ be an ordering of the edges of G . Let $G_0 = G$ and $G_i = G_{i-1} \setminus e_i$ (G_i is obtained from G_{i-1} by removing the edge e_i but not its end vertices). The ordering $(e_1, \dots, e_m)$ is a perfect edge-without-vertex elimination ordering if e_i is bisimplicial in G_{i-1} for all $1 \leq i \leq m$.
 - * A bipartite graph is chordal bipartite if it admits a perfect edge-without-vertex elimination ordering.
- Decomposições e Separadores
- Classes
 - cordais
 - perfeitos
 - Intervalos
 - arco-circulares
 - trapezoidais
 - bipartidos cordais
 - permutação
 - bipartido de permutação
 - split / threshold
 - linha
 - grafo clique
 - grafo biclique

2 Introdução

Por que usar classes de grafos?

Problema $\mathcal{P}$ definido sobre todos os grafos. $\mathcal{P}$ pode ser NP-difícil em geral, mas pode ter algoritmo polinomial para um conjunto restrito de grafos.

Exemplo: coloração de vértices é NP-difícil em geral, mas é polinomial para grafos perfeitos.

Podemos definir uma classe de grafos de diversas formas. Em geral usamos uma certa propriedade que os grafos da classe satisfazem.

Exemplo: grafos bipartidos são os grafos que admitem uma bipartição de seus vértices de forma que não existem arestas entre vértices da mesma parte.

Quando temos uma classe de grafos $\mathcal{A}$, o problema de reconhecer se um certo grafo G está em $\mathcal{A}$ é denominado de “problema de reconhecimento de $\mathcal{A}$ ”. Nem toda classe pode ser reconhecida facilmente.

Exemplo: reconhecer grafos planares é polinomial, mas reconhecer grafos 1-planar é NP-completo.

Em geral, se temos um problema NP-completo $\mathcal{P}$ e uma classe $\mathcal{A}$, tal que $\mathcal{P}$ restrito a $\mathcal{A}$ ($\mathcal{P}_{\mathcal{A}}$) e o reconhecimento de $\mathcal{A}$ são polinomiais, temos um algoritmo que roda em tempo polinomial se o grafo de entrada é de $\mathcal{A}$.

Classes de grafos podem ser hierárquicas ou não.

Uma classe $\mathcal{A}$ é hierárquica se todo subgrafo induzido de um grafo da classe é também da classe. Ou seja,

$$G \in \mathcal{A} \Leftrightarrow \text{para todo } H \subseteq G, H \in \mathcal{A}.$$

3 Definições de classes

K_n , $K_{p,q}$, C_n , P_n , etc

- propriedades (invariantes)

Exemplos:

- Grafos com grau máximo d
- Grafos com clique máxima de tamanho c
- árvores (conexos e acíclicos)

- subgrafos proibidos

Exemplos:

- Grafos sem triângulos

- Grafos sem ciclo ímpar (bipartidos)
- Grafos H -free
- operadores
 - grafos de intersecção / modelos
 - Exemplos:
 - * Grafos de intervalos
 - * Grafo linha
 - * Grafo de intersecção de subárvores de uma árvore (cordais)
 - decomposição
 - Exemplos:
 - * Cografos (decomposição modular)
 - * Join
 - * Grafos com separadores clique
- ordens
 - Exemplos:
 - Grafos de intervalos (ordem de fim dos intervalos)
 - Grafos cordais (ordem perfeita de eliminação)
 - Grafos bipartido cordal (ordem perfeita de eliminação de arestas-não-vértices)

4 Ordens

- Vértice simplicial
- aresta bissimplicial
 - An edge $\{u, v\}$ in a bipartite graph B is called bisimplicial if $N(u) \cup N(v)$ induces a biclique in B .
- ordem perfeita de eliminação
 - A perfect elimination ordering in a graph is an ordering of the vertices of the graph such that, for each vertex v , v and the neighbors of v that occur after v in the order form a clique. A graph is chordal if and only if it has a perfect elimination ordering.

- Chordal.
- ordem de vizinho máximo
 - A vertex $u \in N[v]$ is a maximum neighbour of v if for all $w \in N[v]$, $N[w] \subseteq N[u]$. A vertex ordering $v_1, \dots, v_n$ is a maximum neighbourhood ordering if for each $i < n$, v_i has a maximum neighbour in G_i .
 - Dually chordal.
- ordem perfeita de eliminação de arestas
 - For an edge ordering $e_1, \dots, e_k$ let S_i be the set of endpoints of $e_1, \dots, e_i$ and $S_0 = \emptyset$. $e_1, \dots, e_k$ is a perfect edge elimination ordering for a bipartite graph $B = (V, E)$ if $B[V \setminus S_k]$ has no edges, and each edge e_i is bisimplicial in $B[V \setminus S_{i-1}]$. B is perfect elimination bipartite if it admits a perfect edge elimination ordering.
- ordem de eliminação perfeita de arestas-não-vértices
 - Let $(e_1, \dots, e_m)$ be an ordering of the edges of G . Let $G_0 = G$ and $G_i = G_{i-1} \setminus e_i$ (G_i is obtained from G_{i-1} by removing the edge e_i but not its end vertices). The ordering $(e_1, \dots, e_m)$ is a perfect edge-without-vertex elimination ordering if e_i is bisimplicial in G_{i-1} for all $1 \leq i \leq m$.
 - A bipartite graph is chordal bipartite if it admits a perfect edge-without-vertex elimination ordering.

5 Decomposições e Separadores

- decomposição modular
- separador clique
- decomposição em componentes biconexas / blocos

6 Classes

- cordais
- perfeitos

- intervalos
- arco-circulares
- trapezoidais
- bipartidos cordais
- permutação
- bipartido de permutação
- split / threshold
- linha
- grafo clique
- grafo biclique
- planar
- 1-planar