Primeira Prova - Otimização
Prof. André Guedes
2 de abril de 2024

1. Explique como podemos usar o algoritmo Simplex para decidir se um certo problema de programação linear é:
   (a) (5 pontos) Inviável
   (b) (5 pontos) Ilimitado
   (c) (5 pontos) Tem infinitas soluções

2. (10 pontos) Discuta o problema de ciclos no algoritmo Simplex, apresentando ideias de como evitar e/ou detectar ciclos na execução.

3. Considere o problema abaixo.

   max $ax + by$
   s.t.
   $2y - x \leq 2$
   $x, y \geq 0$

   Para que valores de a e b este problema é:
   (a) (5 pontos) Ilimitado.
   (b) (5 pontos) Tem uma única solução que tem $y = 0$.
   (c) (5 pontos) Tem uma única solução que tem $y > 0$.
   (d) (5 pontos) Tem infinitas soluções.

4. (10 pontos) O que são as regras de pivoteamento e para que servem?

5. Considere o problema abaixo.

   max $3x - y$
   s.t.
   $x + y \geq 1$
   $x, y \geq 0$

   Resolva este problema graficamente e responda:
   (a) (10 pontos) Este problema é inviável, tem solução única, tem infinitas soluções ou é ilimitado? Justifique.
   (b) (5 pontos) Coloque na forma equacional.
   (c) (15 pontos) Encontre a primeira solução básica viável deste problema, explicando os passos.

6. Considere o problema abaixo.

   max $3x + y$
   s.t.
   $-2x - y \leq -2$
   $x - y \leq 2$
   $x, y \geq 0$

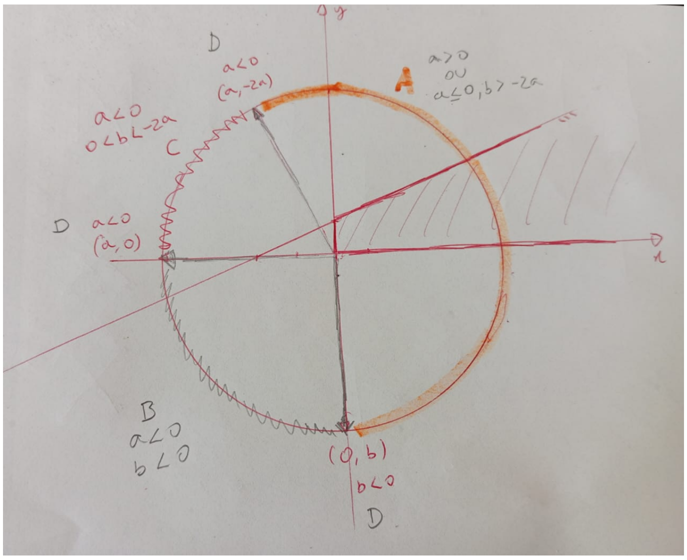
   (a) (5 pontos) Apresente o problema dual deste problema linear.
   (b) (5 pontos) O problema original (primal) é inviável, tem solução única, tem infinitas soluções ou é ilimitado? Justifique.
   (c) (5 pontos) O problema dual é inviável, tem solução única, tem infinitas soluções ou é ilimitado? Justifique.

GABARITO

1. (a) Inviável
   Usando o problema auxiliar para determinar a 1a solução básica viável. Caso as variáveis auxiliares não sejam numas, o problema original é inviável.
   (b) Ilimitado
   Ao escolher uma variável para entrar na base, se nenhuma restrição limita o crescimento da variável (nem da função objetivo) então o problema é ilimitado.
   (c) Tem infinitas soluções
   Na função objetivo não existem mais coeficientes positivos, significando que chegamos no ótimo, e existem coeficientes nulos de variáveis que poderiam entrar na base, significando que existem outras soluções ótimas, ou seja, temos infinitas soluções.

2. ...

3. (a) Ilimitado.
   $a > 0$ OU
   $(a \leq 0$ E $b > -2a)$
   (b) Tem uma única solução que tem $y = 0$.
   $a < 0$ E $b < 0$
   (c) Tem uma única solução que tem $y > 0$.
   $a < 0$ E $0 < b < -2a$
   (d) Tem infinitas soluções.
   $(a = 0$ E $b < 0)$ OU
   $(a < 0$ E $b = -2a)$ OU
   $(a < 0$ E $b = 0)$



4. ...

5. Forma equacional

   max $3x - y$
   s.t.
   $x + y - a = 1$
   $x, y, a \geq 0$

   Problema auxiliar

   max $-u$
   s.t.
   $x + y - a + u = 1$
   $x, y, a, u \geq 0$

Tableau auxiliar 1 ($B = \{u\}$):

$$\begin{array}{lcl} u & = & 1 - x - y + a \\ \hline z & = & -1 + x + y - a \end{array}$$

Entra x e sai u.

Tableau auxiliar 2 ($B = \{x\}$):

$$\begin{array}{lcl} x & = & 1 - u - y + a \\ \hline z & = & 0 - u \end{array}$$

Sem variáveis para entrar, chegamos ao ótimo. Como o ótimo é 0 (zero) e a variável auxiliar (u) está fora da base, basta agora ignorar esta variável e ajustar a função objetivo para encontrar o 1o tableau.

Solução básica viável inicial: $B = \{x\}$, $(x, y, a) = (1, 0, 0)$.

Tableau 1 ($B = \{x\}$):

$$\begin{array}{lcll} x & = & 1 - y + a & \text{(cópia do último tableau auxiliar sem } u\text{)} \\ \hline z & = & 3 - 4y + 3a & \text{(função objetivo original substituindo } x \text{ pela equação acima)} \end{array}$$

Seguindo a solução:

Entra a ... ninguém limita o crescimento de a, e da função objetivo. Logo, é ilimitado.

6. (a) Apresente o problema dual deste problema linear.

$$\begin{aligned} &\min \; -2a + 2b \\ &\text{s.t.} \\ &-2a + b \geq 3 \\ &-a - b \geq 1 \\ &a, b \geq 0 \end{aligned}$$

(b) O problema original (primal) é inviável, tem solução única, tem infinitas soluções ou é ilimitado? Justifique.
Ilimitado, pois é viável e o dual é inviável.
OU
Ilimitado, graficamente.

(c) O problema dual é inviável, tem solução única, tem infinitas soluções ou é ilimitado? Justifique.
Inviável, graficamente.
OU
Inviável, pois o primal é Ilimitado.