

1. Explique como podemos usar o algoritmo Simplex para decidir se um certo programa linear (PL) é:

- (a) (5 pontos) Inviável
- (b) (5 pontos) Ilimitado
- (c) (5 pontos) Tem infinitas soluções

2. Considere os PLs A e B abaixo.

A	$\max 2y - 3x$	B	$\max 3x - 4y$
	s.t.		s.t.
	$-x - 2y \leq -1$		$-2x - y \leq -2$
	$x, y \geq 0$		$x - y \leq 2$
			$x, y \geq 0$

Para cada um deles:

- (a) (10 pontos) Coloque na forma equacional.
 - (b) (10 pontos) Apresente o PL dual.
 - (c) (10 pontos) O problema original (primal) é inviável, tem solução única, tem infinitas soluções ou é ilimitado? Justifique.
 - (d) (10 pontos) O problema dual é inviável, tem solução única, tem infinitas soluções ou é ilimitado? Justifique.
 - (e) (10 pontos) Apenas para o problema A , encontre a primeira solução básica viável (caso exista) usando o algoritmo Simplex, explicando os passos.
3. (15 pontos) A tabela abaixo apresenta 5 opções de alimentos em uma dieta que visa atender as necessidades mínimas de proteína e sais minerais:

Alimento	A	B	C	D	E	necessidades mínimas
proteína (g)	3	4	5	3	6	42
sais minerais (g)	2	3	4	3	3	24
custo (\$)	25	35	50	33	36	

Um vendedor de pílulas propõe substituir a dieta de alimentos expressa nesta tabela por uma dieta de pílulas de proteína (1g cada) e de sais minerais (1g cada), garantindo que será possível obter a mesma quantidade de nutrientes com custo menor ou igual ao dos alimentos, unicamente com as pílulas. Formule este problema usando Programação Linear, de modo a encontrar os preços das pílulas de proteína e de sais minerais que maximiza a renda do vendedor, atendendo as necessidades mínimas da dieta.

(Sugestão: considere o dual do problema da dieta clássico)

4. Considere um programa linear inteiro, P_{PLI} , de maximização, e sua versão relaxada¹, $P_{Relaxado}$. Sejam OPT_{PLI} e $OPT_{Relaxado}$ os valores ótimos (valor da função objetivo em uma solução ótima) dos dois programas, respectivamente.

- (a) (10 pontos) O que podemos dizer da relação entre OPT_{PLI} e $OPT_{Relaxado}$?
- (b) (10 pontos) É correto afirmar que sempre podemos ter uma “boa” ideia do valor de OPT_{PLI} baseado no valor de $OPT_{Relaxado}$?

¹Sem a restrição de integralidade.

GABARITO

1. (a) Inviável

Usando o problema auxiliar para determinar a 1ª solução básica viável. Caso as variáveis auxiliares não sejam nulas, o problema original é inviável.

(b) Ilimitado

Ao escolher uma variável para entrar na base, se nenhuma restrição limita o crescimento da variável (nem da função objetivo) então o problema é ilimitado.

(c) Tem infinitas soluções

Na função objetivo não existem mais coeficientes positivos, significando que chegamos no ótimo, e existem coeficientes nulos de variáveis que poderiam entrar na base, significando que existem outras soluções ótimas, ou seja, temos infinitas soluções.

2. (a) Forma equacional

$$\begin{array}{ll}
 A - eq & \max 2y - 3x \\
 & \text{s.t.} \\
 & x + 2y - w = 1 \\
 & x, y, w \geq 0
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ll}
 B - eq & \max 3x - 4y \\
 & \text{s.t.} \\
 & 2x + y - v = 2 \\
 & x - y + w = 2 \\
 & v, w, x, y \geq 0
 \end{array}$$

(b) PL Dual

$$\begin{array}{ll}
 A - dual & \min -a \\
 & \text{s.t.} \\
 & -a \geq -3 \\
 & -2a \geq 2 \\
 & a \geq 0
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ll}
 B - dual & \min -2a + 2b \\
 & \text{s.t.} \\
 & -2a + b \geq 3 \\
 & -a - b \geq -4 \\
 & a, b \geq 0
 \end{array}$$

(c) A é ilimitado (graficamente). B tem solução única no ponto $(2, 0)$ (graficamente).

(d) O dual de A é inviável (pelo teorema da dualidade e por inspeção simples). O dual de B é viável (pelo teorema da dualidade) e tem solução única no ponto $(0, 3)$ (graficamente).

(e) Criar o problema auxiliar, incluindo a variável auxiliar u no PL na forma equacional.

$$\begin{array}{ll}
 A - aux & \max -u \\
 & \text{s.t.} \\
 & x + 2y - w + u = 1 \\
 & x, y, w, u \geq 0
 \end{array}$$

Montar o primeiro tableau com u na base e resolver.

Tableau auxiliar 1 ($B = \{u\}$):

$$\begin{array}{rcl}
 u & = & 1 - x - 2y + w \\
 \hline
 z & = & -1 + x + 2y - w
 \end{array}$$

Entra x e sai u .

Tableau auxiliar 2 ($B = \{x\}$):

$$\begin{array}{rcl}
 x & = & 1 - u - 2y + w \\
 \hline
 z & = & 0 - u
 \end{array}$$

Sem variáveis para entrar, chegamos ao ótimo. Como o ótimo é 0 (zero) e a variável auxiliar (u) está fora da base, basta agora ignorar esta variável e ajustar a função objetivo para encontrar o 1º tableau.

Solução básica viável inicial: $B = \{x\}$, $(x, y, w) = (1, 0, 0)$.

Abaixo apresento o primeiro tableau do proble $A - eq$, apenas para ilustrar. Esta parte não era necessária na resposta.

Tableau 1 ($B = \{x\}$):

$$\begin{array}{rcl}
 x & = & 1 - 2y + w \quad (\text{cópia do último tableau auxiliar sem } u) \\
 \hline
 z & = & -3 + 8y - 3w \quad (\text{função objetivo original substituindo } x \text{ pela equação acima})
 \end{array}$$

3. Formulação do problema da dieta clássico:

$$\begin{array}{ll} P & \min 25a + 35b + 50c + 33d + 36e \\ & \text{s.t.} \\ & 3a + 4b + 5c + 3d + 6e \geq 42 \\ & 2a + 3b + 4c + 3d + 3e \geq 24 \\ & a, b, c, d, e, f \geq 0 \end{array}$$

E seu dual:

$$\begin{array}{ll} D & \max 42p + 24s \\ & \text{s.t.} \\ & 3p + 2s \leq 25 \\ & 4p + 3s \leq 35 \\ & 5p + 4s \leq 50 \\ & 3p + 3s \leq 33 \\ & 6p + 3s \leq 36 \\ & p, s \geq 0 \end{array}$$

A resposta é o problema D (dual de P).

4. (a) $OPT_{PLI} \leq OPT_{Relaxado}$, já que ao retirar uma restrição, o conjunto viável aumenta e podemos ir “mais longe” na função objetivo, que é de maximização.
- (b) Não é correto. Existem casos em que OPT_{PLI} é arbitrariamente menor que $OPT_{Relaxado}$.