CI1055: Algoritmos e Estruturas de Dados I

Profs. Drs. Marcos Castilho, Bruno Müller Jr, Carmem Hara

Departamento de Informática/UFPR

1 de agosto de 2020

Resumo

Cálculo de séries

Objetivos da aula

- Mostrar como implementar séries, em particular as *Séries de Taylor*

Motivação

- Muitas funções importantes podem ser calculadas usando-se Séries de Taylor
- Exemplos: $e^x, sen(x), cos(x), \ldots$

- Uma série de Taylor tem a forma:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - a)^n,$$

onde

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

- O cálculo é feito em torno do ponto $x = a$
- $f^{(n)}$ é a n-ésima derivada de f.

Exemplos

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}, |x| < 1$$

$$sen(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Exemplos

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

$$ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots$$

$$sen(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots$$

Motivação

- Computar estes cálculos não é tão simples quanto parece
- Os cálculos podem não convergir
- Vamos usar a técnica do acumulador, dentre outras
- Vamos iniciar com uma série bem simples
- Pretendemos mostrar como se calcula a função $sen(x)$ até o final desta aula

A série Harmônica

$$H_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots$$

- A série Harmônica diverge
- Não podemos computar até o infinito
- Vamos assumir que o cálculo será feito até o *n*-ésimo termo, sendo *n* pornecido pelo usuário

Cálculo computacional de séries

- Baseada na técnica do acumulador
- O segredo é perceber como um termo pode ser obtido a partir do anterior
- Ou de modo equivalente: como transformar um terno no próximo
- Se isto for bem resolvido então a implementação é simples, pois o uso da técnica do acumulador é bastante simples

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{n}$$

- Observar os termos:
  - uma fração com um *numerador* e um *denominador*
- Observar a diferença entre os termos:
  - todos os numeradores são iguais a 1
  - o primeiro denominador é 1
  - um denominador é obtido do anterior somando-se 1

Computação da série Harmônica

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{n}$$

- Numerador: manter constante igual a 1
- Inicialização do denominador: `den:= 1`
- Padrão repetitivo do denominador: `den:= den + 1`
- Critério de parada: quando o contador atingir n

Implementação da série Harmônica

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{n}$$

```
program serie_harmonica;
var cont, num, den, n: longint;
    soma: real;
begin
    read (n);
    cont:= 1;
    num:= 1;
    den:= 1;
    soma:= 0;
    while cont <= n do
    begin
        soma:= soma + num/den;
        cont:= cont + 1;
        den:= cont;
    end;
    writeln (soma:0:5);
end.
```

Cálculo do seno

$$sen(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots$$

- Parece bem mais complicado, não?
- Numeradores:
  - são potências de x, sempre ímpares
- Denominadores:
  - são fatoriais de números ímpares
- O sinal dos termos se invertem a cada termo

Vamos fazer em etapas, tentando resolver um problema de cada vez

Comparando seno com harmônica

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{n}$$

$$sen(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \ldots$$

- Saber somar termos é simples
- Como dito, o segredo é transformar um termo no próximo
- Vamos implementar o seno progressivamente, partindo da série harmônica, até chegarmos ao seno

Uma série mais simples do que o seno

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{n}$$

$$F1_n = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \ldots + \frac{1}{n!}$$

- A diferença entre elas é o denominador:
  - na primeira, são números inteiros sequenciais
  - na segunda, são fatoriais de inteiros sequenciais

Cálculo de $f1$

Harmônica

```
begin
    read (n);
    cont:= 1;
    num:= 1;
    den:= 1;
    soma:= 0;
    while cont <= n do
    begin
        soma:= soma + num/den;
        cont:= cont + 1;
        den:= cont;
    end;
    writeln (soma:0:5);
end.
```

$F1$

```
begin
    read (n);
    cont:= 1;
    num:= 1;
    den:= 1;
    soma:= 0;
    while cont <= n do
    begin
        soma:= soma + num/den;
        cont:= cont + 1;
        den:= den * cont;
    end;
    writeln (soma:0:5);
end.
```

Trocando o sinal

$$F1_n = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \ldots + \frac{1}{n!}$$

$$F2_n = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!}$$

- A diferença entre elas é o sinal dos termos
  - na primeira, são todos positivos
  - na segunda, são invertidos a cada termo

Cálculo de $f2$

$F1$

```
begin
    read (n);
    cont:= 1;
    num:= 1;
    den:= 1;
    soma:= 0;

    while cont <= n do
    begin
        soma:= soma + num/den;

        cont:= cont + 1;
        den:= den * cont;
    end;
    writeln (soma:0:5);
end.
```

$F2$

```
begin
    read (n);
    cont:= 1;
    num:= 1;
    den:= 1;
    soma:= 0;
    sinal:= 1;
    while cont <= n do
    begin
        soma:= soma + sinal*num/den;
        sinal:= -sinal;
        cont:= cont + 1;
        den:= den * cont;
    end;
    writeln (soma:0:5);
end.
```

Cuidando do numerador

$$F2_n = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!}$$

$$F3_n = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^n}{n!}$$

- A diferença entre elas é o numerador
  - na primeira, são todos iguais a 1
  - na segunda, são potencias progressivas de x

Cálculo de $f3$

$F2$

```
begin
    read (n);
    cont:= 1;
    num:= 1;
    den:= 1;
    soma:= 0;
    sinal:= 1;
    while cont <= n do
    begin
        soma:= soma + sinal*num/den;
        sinal:= -sinal;
        cont:= cont + 1;

        den:= den * cont;
    end;
    writeln (soma:0:5);
end.
```

$F3$

```
begin
    read (n, x);
    cont:= 1;
    num:= x;
    den:= 1;
    soma:= 0;
    sinal:= 1;
    while cont <= n do
    begin
        soma:= soma + sinal*num/den;
        sinal:= -sinal;
        cont:= cont + 1;
        num:= num * x;
        den:= den * cont;
    end;
    writeln (soma:0:5);
end.
```

Alterando o numerador

$$F3_n = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^n}{n!}$$

$$F4_n = x - \frac{x^3}{2!} + \frac{x^5}{3!} - \frac{x^7}{4!} + \frac{x^9}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{(2*n+1)}}{n!}$$

- A diferença entre elas é o numerador
  - na primeira, são potencias progressivas de x
  - na segunda, são potencias ímpares progressivas de x

Cálculo de $f4$

$F3$

```
begin
    read (n, x);
    cont:= 1;
    num:= x;
    den:= 1;
    soma:= 0;
    sinal:= 1;
    while cont <= n do
    begin
        soma:= soma + sinal*num/den;
        sinal:= -sinal;
        cont:= cont + 1;
        num:= num * x;
        den:= den * cont;
    end;
    writeln (soma:0:5);
end.
```

$F4$

```
begin
    read (n, x);
    cont:= 1;
    num:= x;
    den:= 1;
    soma:= 0;
    sinal:= 1;
    while cont <= n do
    begin
        soma:= soma + sinal*num/den;
        sinal:= -sinal;
        cont:= cont + 1;
        num:= num * x * x;
        den:= den * cont;
    end;
    writeln (soma:0:5);
end.
```

Finalmente, $sen(x)$

$$F4_n = x - \frac{x^3}{2!} + \frac{x^5}{3!} - \frac{x^7}{4!} + \frac{x^9}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{(2*n+1)}}{n!}$$

$$sen(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{(2*n+1)}}{(2*n+1)!}$$

- A diferença entre elas é o denominador:
  - na primeira, são fatoriais de n progressivas
  - na segunda, são fatoriais de n de ímpares progressivos

Cálculo de *sen*(*x*)

*F*4

```
begin
    read (n, x);
    cont:= 1;
    num:= x;
    den:= 1;
    soma:= 0;
    sinal:= 1;
    while cont <= n do
    begin
        soma:= soma + sinal*num/den;
        sinal:= -sinal;
        cont:= cont + 1;
        num:= num * x * x;
        den:= den * cont;
    end;
    writeln (soma:0:5);
end.
```

sen(*x*)

```
begin
    read (n, x);
    cont:= 1;
    num:= x;
    den:= 1;
    soma:= 0;
    sinal:= 1;
    while cont <= n do
    begin
        soma:= soma + sinal*num/den;
        sinal:= -sinal;
        den:= den * (2*cont)*(2*cont+1);
        num:= num * x * x;
        cont:= cont + 1;
    end;
    writeln (soma:0:5);
end.
```

Resumo

- Calcular séries não é complicado
- Conforme explicado, basta perceber como o próximo termo é relacionado com o atual
- Percebendo esta diferença, implementa-se com tranquilidade

Resumo

- Por exemplo:
  - numerador: multiplica-se por x^2 para obter o próximo
  - denominador: aprende-se a fazer o fatorial de ímpares sucessivos

Fim do tópico

- este material está no livro no capítulo 7, seção 7.8

Licença

- Slides feitos em LaTeX usando beamer
- Licença

  Creative Commons Atribuição-Uso Não-Comercial-Vedada a Criação de Obras Derivadas 2.5 Brasil License.http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.5/br/