CI1055: Algoritmos e Estruturas de Dados I

Profs. Drs. Marcos Castilho, Bruno Müller Jr, Carmem Hara

Departamento de Informática/UFPR

25 de agosto de 2020

Resumo

Aplicações de vetores: polinômios

Objetivos da aula

- Vamos mostrar como representar e fazer cálculos com polinômios representados como vetores

Polinômios: definição (para este curso)

- Para uma sucessão de termos $a_0, ..., a_n \in \mathbb{R}$, definimos um polinômio de grau n como sendo uma função que possui a seguinte forma:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

- Consideramos que $\forall k > n$, então $a_k = 0$
- Consideramos que $a_n \neq 0$ para um polinômio de grau n

Representação computacional de um polinômio

Uma possível representação para um polinômio é um vetor de $n+1$ elementos cujos conteúdos são os coeficientes reais dos respectivos monômios.

```
type polinomio = array [0..max] of real;
```

- $P(x) = 5 - 2x + x^2$:

0	1	2
5	-2	1

- $P(x) = 7 - 2x^2 + 8x^3 - 2x^7$

0	1	2	3	4	5	6	7
7	0	-2	8	0	0	0	-2

Valor do polinômio em um ponto $x \in \mathbb{R}$

Por exemplo, se $P(x) = 5 - 2x + x^2$ então,
$P(1) = 5 - 2 \times 1 + 1^2 = 4$.

```
function valor_no_ponto (var p: polinomio; grau: integer; x: real): real;
var soma, potx: real;
    i: integer;
begin
    potx:= 1;
    soma:= 0;
    for i:= 0 to grau do
    begin
        soma:= soma + p[i]*potx;
        potx:= potx * x;
    end;
    valor_no_ponto:= soma;
end;
```

Polinômio derivada

Seja $P\prime(x)$ a derivada de $P(x)$ assim definido:

$$P\prime(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \ldots + 2a_2 x + a_1$$

```
procedure derivar (var p: polinomio;      graup: integer;
                   var d: polinomio; var graud: integer);
var i: integer;
begin
  if graup = 0 then
  begin
    graud:= 0;
    d[0]:= 0;
  end
  else
  begin
    graud:= graup - 1;
    for i:= 0 to graud do
      d[i]:= (i+1) * p[i+1];
  end;
end;
```

Valor do polinômio derivada em um ponto

O cálculo do valor no ponto de uma derivada de um polinômio não necessita que se calcule previamente um vetor auxiliar contendo a derivada.

```
function valor_derivada_no_ponto (var p: polinomio; graup: integer
      ; x: real): real;
var i: integer;
    soma, potx: real;
begin
     soma:= 0;
     potx:= 1;
     for i:= 1 to graup do
     begin
          soma:= soma + i * p[i] * potx;
          potx:= potx * x;
     end;
     valor_derivada_no_ponto:= soma;
end;
```

Soma de polinômios

Sejam dois polinômios P e Q assim definidos, supondo que $n >= m$:

$$P(x) = a_n x^n + \ldots + a_m x^m + \ldots + a_1 x + a_0$$

$$Q(x) = b_n x^m + b_{n-1} x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0$$

Então o polinômio soma de P e Q, denotado $P + Q$ é assim definido:

$$(P+Q)(x) = a_n x^n + \ldots + a_{m+1} x^{m+1} + (a_m + b_m) x^m + \ldots + (a_1 + b_1) x + (a_0 + b_0)$$

Soma de polinômios

É a mesma operação de soma de vetores já estudada, mas agora os tamanhos podem ser diferentes, assumindo que os coeficentes que faltam têm grau nulo.

```
procedure somar (var p: polinomio;      graup: integer;
                 var q: polinomio;      grauq: integer;
                 var s: polinomio; var graus: integer);
var i,menorgrau: integer;
begin
  (* o grau do pol soma eh o maior grau entre p e q *)
  (* copiar os coeficientes que o maior pol tem a mais *)
  if graup > grauq then
  begin
    graus:= graup;
    menorgrau:= grauq;
    for i:= menorgrau+1 to graus do
      s[i]:= p[i];
  end
  else
  begin
    graus:= grauq;
    menorgrau:= graup;
    for i:= menorgrau+1 to graus do
      s[i]:= q[i];
  end;

  for i:= 0 to menorgrau do
    s[i]:= p[i] + q[i];

end;
```

Produto de polinômios

O produto de P por Q, denotado PQ é assim definido:

$$\begin{aligned}(PQ)(x) = (a_{n+m}b_0 + \ldots + a_n b_m + \ldots + a_0 b_{n+m})x^{n+m} \\ + \ldots + (a_k b_0 + a_{k-1} b_1 + \ldots + a_0 b_k)x^k + \ldots \\ \vdots \\ +(a_1 b_0 + a_0 b_1)x + (a_0 b_0)\end{aligned}$$

A operação matemática exige que sejam feitas todas as multiplicações e posterior agrupamento dos monômios de mesmo grau, somando-se os coeficientes, para cada monômio.

Produto de polinômios

- Os cálculos para cada monômio são realizados à medida em que os índices dos dois comandos *for* variam
- Isto é um uso especial da técnica dos acumuladores: os acúmulos não são simultâneos para cada monômio do resultado final da operação
- Os cálculos são feitos aos poucos
- Para isto é preciso zerar o vetor antes de começar

Produto de polinômios

```
procedure multiplicar (var p: polinomio;     graup: integer;
                       var q: polinomio;     grauq: integer;
                       var m: polinomio; var grauM: integer);
var i,j: integer;
begin
  grauM:= graup + grauq;
  for i:= 0 to grauM do
    m[i]:= 0;

  for i:= 0 to graup do
    for j:= 0 to grauq do
      m[i+j]:= m[i+j] + p[i]*q[j];

  if ((graup = 0) and (p[0] = 0)) or
     ((grauq = 0) and (q[0] = 0)) then
    grauM:= 0;
end;
```

Em resumo...

- Com este tema terminamos a parte de aplicações de vetores
- Usamos uma estrutura de dados para resolver um problema matemático importante
- Obviamente o utilizamos para fins didáticos
- O importante é entender como usar uma estrutura de dados para resolver um problema

Fim de vetores

- A apresentação básica de vetores, neste curso, está encerrada
- Engana-se o estudante que pensa que está livre de vetores
- Eles aparecem no quotidiano muito frequentemente!

Sequência do curso

- Matrizes
- Registos
- Tipos abstratos de dados
- Aplicações em jogos

Exercício

- Calcular o valor no ponto para a soma e produto de polinômios sem gerar os vetores auxiliares intermediários.

Fim do tópico

- este material está no livro no capítulo 9, seção 9.7.2

Licença

- Slides feitos em LaTeX usando beamer
- Licença

  Creative Commons Atribuição-Uso Não-Comercial-Vedada a Criação de Obras Derivadas 2.5 Brasil License.`http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.5/br/`

  Creative Commons Atribuição-Uso Não-Comercial-Vedada a Criação de Obras Derivadas 2.5 Brasil License.`http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.5/br/`