CIRCUITOS LÓGICOS
SISTEMA DE NUMERAÇÃO

Marco A. Zanata Alves

Slides baseados nos slides de Rodrigo Hausen - CMCC – UFABC (2013)
http://compscinet.org/hausen/courses/circuitos/

SISTEMA DE NUMERAÇÃO

Número: ideia de quantidade

Numeral: representação dessa ideia (falada ou escrita)

Na prática, usamos a palavra número para nos referirmos também a um numeral.

Ex: O número cento e vinte e oito, é representado pelo numeral 128.

SISTEMA DE NUMERAÇÃO

Como representar todos os números naturais possíveis?

Um símbolo para cada número. Ex.: 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z, *, †, •, (...como lembrar de todos?)

Símbolos diferentes para algumas quantidades, **combinações** para as demais.

- Ex.: símbolos no sistema romano são I (um), V (cinco), X (dez), L (cinquenta), C (cem), D (quinhentos), M (mil).
- Combinações: II (dois), III (três), IV (quatro), MCMLXXXIV (mil novecentos e oitenta e quatro), . . .

SISTEMA DE NUMERAÇÃO

Algarismos: conjunto finito de símbolos numéricos que usamos para representar apenas algumas quantidades (não todas).

Todo e qualquer número deve poder ser representado por uma **combinação de algarismos**

Exemplo: os algarismos chamados indo-arábicos são 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Exemplo: O numeral 128 é representado pelos algarismos 1, 2 e 8.

SISTEMA DE NUMERAÇÃO

Sistema de numeração: forma de atribuir uma representação única para cada número.

Sistema de numeração posicional: sistema de numeração onde cada número é representado por uma combinação de algarismos, onde a posição do algarismo altera a quantidade que ele representa.

SISTEMA DECIMAL DE NUMERAÇÃO POSICIONAL

SISTEMA DECIMAL DE NUMERAÇÃO POSICIONAL

Algarismos ou dígitos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Por possuir dez algarismos distintos, é chamado **decimal**.

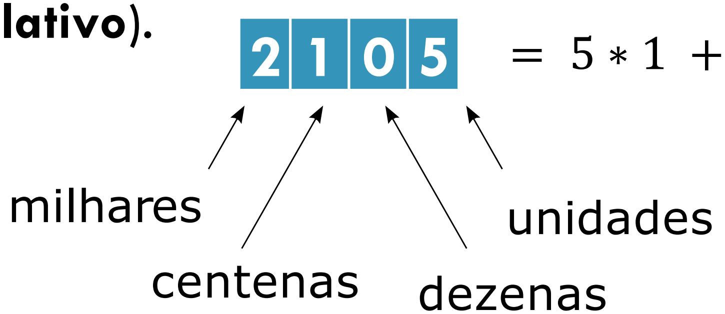
Valor absoluto de cada algarismo: a quantidade que ele representa. 0 (zero) = nada, 1 = um, etc.

SISTEMA DECIMAL DE NUMERAÇÃO POSICIONAL

Algarismos ou dígitos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Por possuir dez algarismos distintos, é chamado **decimal**.

Valor absoluto de cada algarismo: a quantidade que ele representa. 0 (zero) = nada, 1 = um, etc.

Dependendo da **posição** do algarismo na representação do número, a quantidade que ele representa varia (**valor posicional** ou valor **relativo**).



$$= 5 * 1 + 0 * 10 + 1 * 100 + 2 * 1000$$

SISTEMA DECIMAL DE NUMERAÇÃO POSICIONAL

Em geral, um número inteiro A no sistema decimal é representado por n dígitos

$$a_{n-1}\, a_{n-2} \ldots a_2\;\; a_1\;\; a_0$$

onde cada a_i é um algarismo decimal.

SISTEMA DECIMAL DE NUMERAÇÃO POSICIONAL

Em geral, um número inteiro A no sistema decimal é representado por n dígitos

$$a_{n-1}\, a_{n-2} \ldots a_2\ \ a_1\ \ a_0$$

onde cada a_i é um algarismo decimal.

$$a_0 * 1\ +\ a_1 * 10\ +\ a_2 * 100 + \ldots + a_{n-2} * 10^{n-2}\ +\ a_{n-1} * 10^{n-1}$$

SISTEMA DECIMAL DE NUMERAÇÃO POSICIONAL

Em geral, um número inteiro A no sistema decimal é representado por n dígitos

$$a_{n-1}\; a_{n-2} \ldots a_2\;\; a_1\;\; a_0$$

onde cada a_i é um algarismo decimal.

$$a_0 * 1 \;+\; a_1 * 10 \;+\; a_2 * 100 + \ldots + a_{n-2} * 10^{n-2} \;+\; a_{n-1} * 10^{n-1}$$

ou, usando a notação sigma (somatório):

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_i * 10^i$$

NÚMEROS QUE NÃO SÃO INTEIROS

NÚMEROS QUE NÃO SÃO INTEIROS

Naturais {1,2,3,...}

Inteiros {...-3,-2,-1,**0**,1,2,3,...}

Sejam $A \in \mathbb{Z}, B \in \mathbb{N}\ e\ Q \in \mathbb{Z}$.

Dizemos que $\frac{A}{B} = Q$ se $A = B * Q$(ou seja, B cabe exatamente Q vezes dentro de A).

Exemplo: $\frac{6}{2} = 3$ pois $6 = 2 * 3$

NÚMEROS QUE NÃO SÃO INTEIROS

Naturais {1,2,3,...}

Inteiros {...-3,-2,-1,**0**,1,2,3,...}

Sejam $A \in \mathbb{Z}, B \in \mathbb{N}$ e $Q \in \mathbb{Z}$.

Dizemos que $\frac{A}{B} = Q$ se $A = B * Q$(ou seja, B cabe exatamente Q vezes dentro de A).

Exemplo: $\frac{6}{2} = 3$ pois $6 = 2 * 3$

Pode acontecer de B não caber um número exato de vezes dentro de A. Ou seja, resta uma parte de A que excede $B * Q$

Podemos sempre escrever: $A = B * Q + \boldsymbol{R}$ onde $\boldsymbol{R} \in \{\mathbf{0}, \mathbf{1}, \dots, \boldsymbol{B} - \mathbf{1}\}$

NÚMEROS QUE NÃO SÃO INTEIROS

Sejam $A \in \mathbb{Z}, B \in \mathbb{N}\ e\ Q \in \mathbb{Z}$.

Podemos sempre escrever: $A = B * Q + R$ onde $R \in \{0, 1, \dots, B - 1\}$

Chamamos Q de **quociente** e R de **resto** da divisão inteira de A/B.

Exemplo: na divisão de 7 por 2, o quociente é 3 e o resto é 1, pois $7 = 2 * 3 + 1$

Se o resto R da divisão inteira de A por B for diferente de 0, diremos que a divisão inteira de A por B não é exata.

NÚMEROS QUE NÃO SÃO INTEIROS

Sejam $A \in \mathbb{Z}, B \in \mathbb{N}\ e\ Q \in \mathbb{Z}$.

Podemos sempre escrever: $A = B * Q + R$, onde $R \ \in \ \{0, 1, ..., B - 1\}$

Chamaremos Q de **quociente** e R de **resto** da divisão inteira de A por B.

Exemplo: na divisão de 7 por 2, o quociente é 3 e o resto é 1, pois $7 = 2 * 3 + 1$

Se o resto R da divisão inteira de A por B for diferente de 0, diremos que a divisão inteira de A por B não é exata.

Racionais $\{\frac{A}{B} | A \in \mathbb{Z}, B \in \mathbb{Z}^*\}$

Um número que pode ser escrito na forma $\frac{A}{B}$ com $A \in \mathbb{Z}\ e\ B \in \mathbb{N}$, é chamado racional. O conjunto dos racionais é representado por $\mathbb{Q}$ e inclui os números inteiros e as frações com numerador e denominador inteiros mas cuja a divisão não é exata.

NÚMEROS RACIONAIS NO SISTEMA DECIMAL

Todo número racional pode ser representado no sistema decimal da seguinte forma:

$$a_{n-1}\, a_{n-2} \ldots a_2 \;\; a_1 \;\; a_0 \, , a_{-1} \;\; a_{-2} \;\; a_{-3} \;\; \ldots$$

onde há um número finito de algarismos à direita da vírgula ou esses algarismos começam a se repetir a partir de uma certa posição.

NÚMEROS RACIONAIS NO SISTEMA DECIMAL

Todo número racional pode ser representado no sistema decimal da seguinte forma:

$$a_{n-1}\, a_{n-2} \ldots a_2 \;\; a_1 \;\; a_0 \,, a_{-1} \;\; a_{-2} \;\; a_{-3} \;\; \ldots$$

onde há um número finito de algarismos à direita da vírgula ou esses algarismos começam a se repetir a partir de uma certa posição.

Esse numeral representa o número

$$\underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} a_i * 10^i}_{\text{Parte inteira}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} a_{-i} * 10^{-i}}_{\text{Parte fracionária}}$$

NÚMEROS RACIONAIS NO SISTEMA DECIMAL

Todo número racional pode ser representado no sistema decimal da seguinte forma:

$$a_{n-1}\ a_{n-2}\ldots a_2\ a_1\ a_0\ ,a_{-1}\ a_{-2}\ a_{-3}\ \ldots$$

onde há um número finito de algarismos à direita da vírgula ou esses algarismos começam a se repetir a partir de uma certa posição.

Esse numeral representa o número

$$\underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} a_i * 10^i}_{\text{Parte inteira}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} a_{-i} * 10^{-i}}_{\text{Parte fracionária}}$$

Exemplo:

$12{,}4533\ \ldots\ =$

NÚMEROS RACIONAIS NO SISTEMA DECIMAL

Todo número racional pode ser representado no sistema decimal da seguinte forma:

$$a_{n-1}\, a_{n-2} \ldots a_2\;\; a_1\;\; a_0\,, a_{-1}\;\; a_{-2}\;\; a_{-3}\;\; \ldots$$

onde há um número finito de algarismos à direita da vírgula ou esses algarismos começam a se repetir a partir de uma certa posição.

Esse numeral representa o número

$$\underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} a_i * 10^i}_{\text{Parte inteira}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} a_{-i} * 10^{-i}}_{\text{Parte fracionária}}$$

Exemplo:

$12{,}4533 \ldots\; = 1 * 10^1 + 2 * 10^0$

NÚMEROS RACIONAIS NO SISTEMA DECIMAL

Todo número racional pode ser representado no sistema decimal da seguinte forma:

$$a_{n-1}\, a_{n-2} \ldots a_2 \;\; a_1 \;\; a_0 \,, a_{-1} \;\; a_{-2} \;\; a_{-3} \;\; \ldots$$

onde há um número finito de algarismos à direita da vírgula ou esses algarismos começam a se repetir a partir de uma certa posição.

Esse numeral representa o número

$$\underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} a_i * 10^i}_{\text{Parte inteira}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} a_{-i} * 10^{-i}}_{\text{Parte fracionária}}$$

Exemplo:

$$12{,}4533\ldots = 1 * 10^1 + 2 * 10^0 + \mathbf{4 * 10^{-1}} + \mathbf{5 * 10^{-2}} + \mathbf{3 * 10^{-3}} + \mathbf{3 * 10^{-4}} + \mathbf{3 * 10^{-5}} + \cdots$$

TRUNCAMENTO

NÚMEROS RACIONAIS: TRUNCAMENTO

$$a_{n-1}\ a_{n-2} \ldots a_2\ a_1\ a_0, a_{-1}\ a_{-2}\ a_{-3}\ \ldots$$

Observe que à medida que caminhamos mais para a direita após a vírgula, o valor relativo de cada algarismo torna-se cada vez menor.

Podemos tomar uma representação próxima do número, limitando o número de algarismos após a vírgula por uma constante m. Esse procedimento de aproximação chama-se **truncamento** a m dígitos.

NÚMEROS RACIONAIS: TRUNCAMENTO

$$a_{n-1}\ a_{n-2} \dots a_2\ a_1\ a_0, a_{-1}\ a_{-2}\ a_{-3}\ \dots$$

Observe que à medida que caminhamos mais para a direita após a vírgula, o valor relativo de cada algarismo torna-se cada vez menor.

Podemos tomar uma representação próxima do número, limitando o número de algarismos após a vírgula por uma constante m. Esse procedimento de aproximação chama-se **truncamento** a m dígitos.

Ex.: represente a fração $\frac{1007}{495}$ por um numeral truncado a 4 dígitos decimais e calcule o erro de aproximação.

NÚMEROS RACIONAIS: TRUNCAMENTO

$$a_{n-1}\ a_{n-2} \dots a_2\ a_1\ a_0, a_{-1}\ a_{-2}\ a_{-3}\ \dots$$

Observe que à medida que caminhamos mais para a direita após a vírgula, o valor relativo de cada algarismo torna-se cada vez menor.

Podemos tomar uma representação próxima do número, limitando o número de algarismos após a vírgula por uma constante m. Esse procedimento de aproximação chama-se **truncamento** a m dígitos.

Ex.: represente a fração $\frac{1007}{495}$ por um numeral truncado a 4 dígitos decimais e calcule o erro de aproximação.

$\frac{1007}{495} = 2{,}0343434\dots \approx 2{,}0343$ usando 4 dígitos após a vírgula

Erro de aproximação:

$$2{,}0343434\dots - 2{,}0343\ = 0{,}000043434\dots < \ 10^{-4}$$

NÚMEROS REAIS: TRUNCAMENTO

Se adotarmos uma representação finita com m + n algarismos para qualquer número real

$$a_{n-1}\ a_{n-2} \dots a_2\ a_1\ a_0, a_{-1}\ a_{-2}\ a_{-3}\ \dots a_m$$

com n algarismos à esquerda da vírgula, e m algarismos à direita, **então** o erro de aproximação de qualquer número será $err < 10^{-m}$

Aumentar m implica a diminuição do erro.

NÚMEROS REAIS: TRUNCAMENTO

A grande maioria dos números reais que desejamos representar vêm de medidas.

- Ex: comprimento, temperatura, tempo, etc.

Como toda medida possui um erro ϵ intrínseco ao processo de medição, podemos escolher m de maneira que o erro de representação seja menor do que o erro de medição.

Ou seja, escolha m tal que

$$10^{-m} < \epsilon\,, \qquad ou\ seja, \qquad m > -\log_{10}\epsilon$$

BASES NÃO DECIMAIS

BASES NÃO DECIMAIS

A quantidade de algarismos usados em um sistema de numeração posicional é chamada **base.**

Ex.: O sistema de numeração decimal é um sistema de base 10.

A base 10 tornou-se a mais popular pois possuímos 10 dedos (*digitus* em latim)

BASES NÃO DECIMAIS

A quantidade de algarismos usados em um sistema de numeração posicional é chamada **base**.

Ex.: O sistema de numeração decimal é um sistema de base 10.

A base 10 tornou-se a mais popular pois possuímos 10 dedos (*digitus* em latim)

Nada impede de construirmos sistemas de numeração posicionais com bases diferentes de 10 (se tivéssemos apenas 1 dedo em cada mão, provavelmente a base mais popular seria 2)

A base 2 também é chamada base **binária**.

BASES NÃO DECIMAIS

Em um sistema de numeração posicional de **base d**, o número

$$a_{n-1}\ a_{n-2} \ldots a_2\ a_1\ a_0\ a_{-1}\ a_{-2}\ a_{-3}\ \ldots a_m$$

possui valor

$$\underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} a_i * d^i}_{\text{Parte inteira}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} a_{-i} * d^{-i}}_{\text{Parte fracionária}}$$

Para indicar a base em que um número está representado, usaremos a notação

$$(a_{n-1}\ a_{n-2} \ldots a_2\ a_1\ a_0\ a_{-1}\ a_{-2}\ a_{-3}\ \ldots a_m)_d$$

CONVERSÃO DE BASE D PARA BASE 10

Conforme o ditado:

"Existem 10 tipos de pessoas: aquelas que sabem contar em binário, e as que não sabem."

Exemplos de conversão de base:

$$(1101001)_2 = ?$$

CONVERSÃO DE BASE D PARA BASE 10

Conforme o ditado:

"Existem 10 tipos de pessoas: aquelas que sabem contar em binário, e as que não sabem."

Exemplos de conversão de base:

$$(1101001)_2 = 1 * 2^0 + 1 * 2^3 + 1 * 2^5 + 1 * 2^6 = 105$$

$$(110{,}1001)_2 = ?$$

CONVERSÃO DE BASE D PARA BASE 10

Conforme o ditado:

"Existem 10 tipos de pessoas: aquelas que sabem contar em binário, e as que não sabem."

Exemplos de conversão de base:

$$(1101001)_2 = 1 * 2^0 + 1 * 2^3 + 1 * 2^5 + 1 * 2^6 = 105$$

$$(110{,}1001)_2 = 1 * 2^{-4} + 1 * 2^{-1} + 1 * 2^1 + 1 * 2^2 = 6{,}5625$$

$$(1101001)_8 = ?$$

CONVERSÃO DE BASE D PARA BASE 10

Conforme o ditado:

"Existem 10 tipos de pessoas: aquelas que sabem contar em binário, e as que não sabem."

Exemplos de conversão de base:

$$(1101001)_2 = 1 * 2^0 + 1 * 2^3 + 1 * 2^5 + 1 * 2^6 = 105$$
$$(110{,}1001)_2 = 1 * 2^{-4} + 1 * 2^{-1} + 1 * 2^1 + 1 * 2^2 = 6{,}5625$$
$$(1101001)_8 = 1 * 8^0 + 1 * 8^3 + 1 * 8^5 + 1 * 8^6 = 295425$$
$$(B, EEF)_{16} = ?$$

Obs.: valor absoluto dos algarismos na base 16:

```
0 ... 9 A  B  C  D  E  F
0 ... 9 10 11 12 13 14 15
```

CONVERSÃO DE BASE D PARA BASE 10

Conforme o ditado:

"Existem 10 tipos de pessoas: aquelas que sabem contar em binário, e as que não sabem."

Exemplos de conversão de base:

$$(1101001)_2 = 1 * 2^0 + 1 * 2^3 + 1 * 2^5 + 1 * 2^6 = 105$$

$$(110{,}1001)_2 = 1 * 2^{-4} + 1 * 2^{-1} + 1 * 2^1 + 1 * 2^2 = 6{,}5625$$

$$(1101001)_8 = 1 * 8^0 + 1 * 8^3 + 1 * 8^5 + 1 * 8^6 = 295425$$

$$(B,EEF)_{16} = 11 * 16^0 + 14 * 16^{-1} + 14 * 16^{-2} + 15 * 16^{-3} = 11{,}933349609$$

Obs.: valor absoluto dos algarismos na base 16:

```
0 ... 9 A  B  C  D  E  F
0 ... 9 10 11 12 13 14 15
```

CONVERSÃO DE BASE D PARA BASE 10

Conforme o ditado:

"Existem 10 tipos de pessoas: aquelas que sabem contar em binário, e as que não sabem."

Exemplos de conversão de base:

$$(1101001)_2 = 1 * 2^0 + 1 * 2^3 + 1 * 2^5 + 1 * 2^6 = 105$$
$$(110{,}1001)_2 = 1 * 2^{-4} + 1 * 2^{-1} + 1 * 2^1 + 1 * 2^2 = 6{,}5625$$
$$(1101001)_8 = 1 * 8^0 + 1 * 8^3 + 1 * 8^5 + 1 * 8^6 = 295425$$
$$(B,EEF)_{16} = 11 * 16^0 + 14 * 16^{-1} + 14 * 16^{-2} + 15 * 16^{-3} = 11{,}933349609$$

Obs.: valor absoluto dos algarismos na base 16:

```
0 ... 9 A  B  C  D  E  F
0 ... 9 10 11 12 13 14 15
```

Note que as conversões de base d para base 10 são triviais!

CONVERSÃO DE BASES

CONVERSÃO DA BASE 10 PARA BASE D

Vamos começar com os números inteiros.

Ex: represente os números $(0)_{10}$, $(1)_{10}$, $(2)_{10}$ e $(3)_{10}$ na base 2.

CONVERSÃO DA BASE 10 PARA BASE D

Vamos começar com os números inteiros.

Ex: represente os números $(0)_{10}$, $(1)_{10}$, $(2)_{10}$ e $(3)_{10}$ na base 2.

Muito fáceis: $(0)_{10} = 0_2$, $(1)_{10} = 1_2$

Não existe nenhum algarismo para representar $(2)_{10}$ e $(3)_{10}$ na base 2.

Portanto, $(3)_{10}$ deve ser representado como $(a_1\ a_0)_2$

a_0= unidades, a_1 = quantas vezes 2^1 cabe em 3

$$\begin{array}{r|l} 3 & 2 \\ \cline{2-2} 1 & 1 \end{array}$$

$$(3)_{10} = (11)_2$$

CONVERSÃO DA BASE 10 PARA BASE D

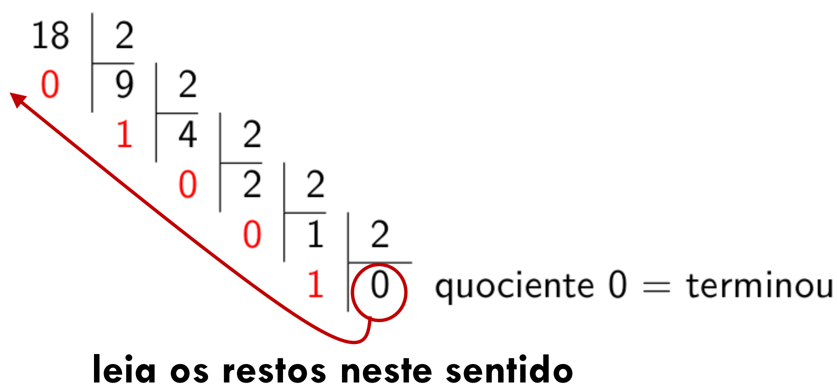
Converter 18 da base 10 para a base 2.

Vamos fazer sucessivas divisões entre o **quociente** e 2 (base)...
Até o quociente ser menor que 2 (base)

CONVERSÃO DA BASE 10 PARA BASE D

Converter 18 da base 10 para a base 2.

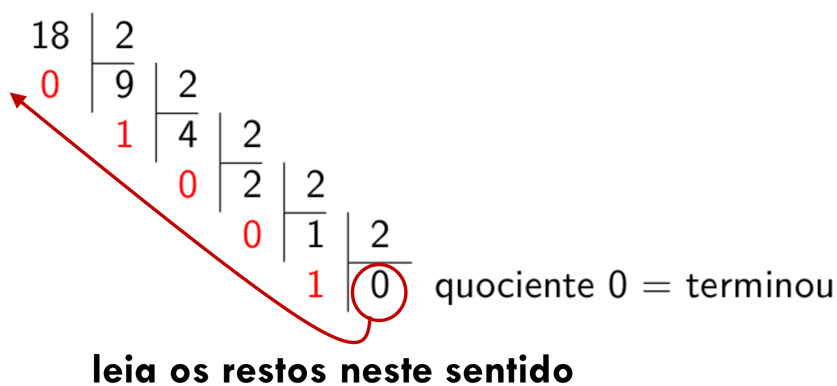
Vamos fazer sucessivas divisões entre o **quociente** e 2 (base)...
Até o quociente ser menor que 2 (base)



CONVERSÃO DA BASE 10 PARA BASE D

Converter 18 da base 10 para a base 2.

Vamos fazer sucessivas divisões entre o **quociente** e 2 (base)...
Até o quociente ser menor que 2 (base)



$(18)_{10} = (\mathbf{0}10010)_2$

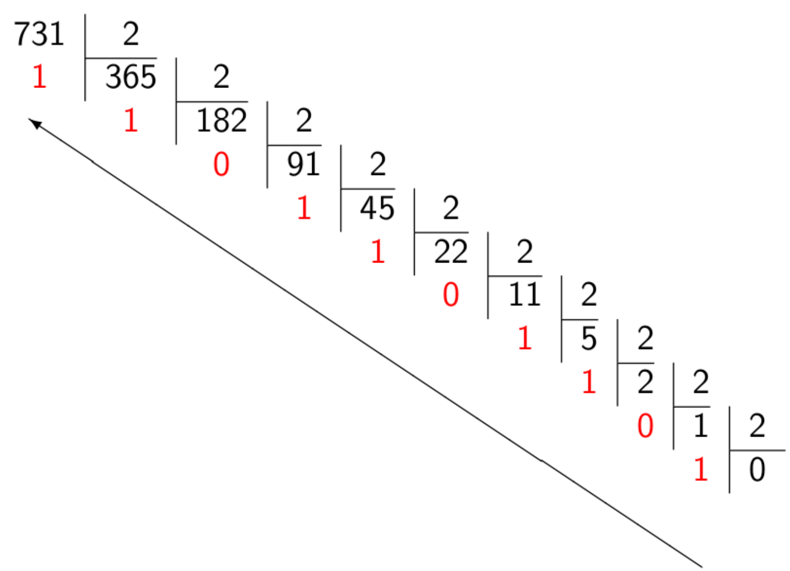
CONVERSÃO DA BASE 10 PARA BASE D

Converter 731 da base 10 para a base 2.

CONVERSÃO DA BASE 10 PARA BASE D

Converter 731 da base 10 para a base 2.

$(731)_{10} = (1011011011)_2$

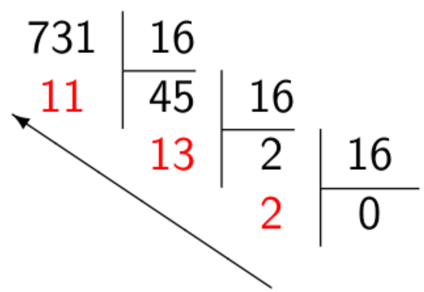


CONVERSÃO DA BASE 10 PARA BASE D

Converter 731 da base 10 para a base 16.

CONVERSÃO DA BASE 10 PARA BASE D

Converter 731 da base 10 para a base 16.



Observe que $(11)_{10} = (B)_{16}$ e que $(13)_{10} = (D)_{16}$, logo

$(731)_{10} = (2DB)_{16}$

CONVERSÃO DA BASE 10 PARA BASE D

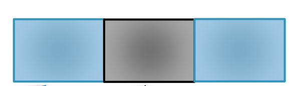
$(18)_{10} = (10010)_2$

$(731)_{10} = (1011011011)_2$

Observação 1:

- Se um número é **par,** na base 2 o seu último algarismo é sempre 0
- Se um número é **ímpar,** na base 2 o seu último algarismo é sempre 1

Observação 2: é muito fácil converter da base 2 para 16 e vice-versa!

$(731)_{10} = (1011011011)_2$ 

CONVERSÃO DA BASE 10 PARA BASE D

$(18)_{10} = (10010)_2$

$(731)_{10} = (1011011011)_2$

Observação 1:

- Se um número é **par**, na base 2 o seu último algarismo é sempre 0
- Se um número é **ímpar**, na base 2 o seu último algarismo é sempre 1

Observação 2: é muito fácil converter da base 2 para 16 e vice-versa!

$(731)_{10} = (1011011011)_2 = (2DB)_{16}$

$(50F1A)_{16} = (\quad)_2$

CONVERSÃO DA BASE 10 PARA BASE D

$(18)_{10} = (10010)_2$

$(731)_{10} = (1011011011)_2$

Observação 1:

- Se um número é **par**, na base 2 o seu último algarismo é sempre 0
- Se um número é **ímpar**, na base 2 o seu último algarismo é sempre 1

Observação 2: é muito fácil converter da base 2 para 16 e vice-versa!

$(731)_{10} = (1011011011)_2 = (2DB)_{16}$

$(50F1A)_{16} = (0101\ 0000\ 1111\ 0001\ 1010)_2$